Devoir Maison AI2 – 2019

Mathématiques

Exercice 1 (2 pts) :

On désigne par $\mathbb{E}$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel formé par les matrices à quatre lignes et une colonne et à coefficients dans $\mathbb{R}$ et on considère la famille de 3 vecteurs suivante :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer si cette famille est libre ou liée
b) Donner une base de $Vect[E_1, E_2, E_3]$

Exercice 2 (2 pts)

a) On désigne par $\mathbb{E}$ le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$. Définir la base canonique de $\mathbb{E}$.
b) On désigne par $\mathbb{E}$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$. Définir la base canonique de $\mathbb{E}$

Exercice 3 (3 pts)

On considère les $\mathbb{R}$ espace vectoriels $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ et l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y, z) = (x - 2\,y - z, 3\,x + y + z)$$

a) Déterminer le noyau et l'image de f
b) Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$

Exercice 4 (5 pts)

On considère l'endomorphisme f du $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer le noyau de f
b) En déduire l'image de f
c) Déterminer les réels λ pour lesquels il existe un vecteur colonne à deux lignes X non nul tel que $A\,X = \lambda\,X$
d) Pour chaque réel λ déterminé en c) montrer que l'ensemble $\mathbb{E}_\lambda$ des vecteurs colonne X tels que $A\,X = \lambda\,X$ est un sous espace vectoriel du $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de ce sous espace.

Exercice 5 (2 pts)

On désigne par $\mathbb{E}$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel formé par les suites réelles et par $\mathbb{F}$ le sous ensemble des suites géométriques.

a) Montrer que $\mathbb{F}$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$
b) On désigne par $\mathbb{G}$ le sous ensemble des suites géométriques de raison 2. $\mathbb{G}$ est il un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$? Justifier

Exercice 6 (2 pts) :

On se place dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on désigne par I la matrice de cet ensemble ayant tous ses termes nuls sauf ceux de sa diagonale qui valent 1. On suppose qu'une matrice A de cet ensemble est inversible et que la matrice $I + A$ l'est aussi.

Montrer $I + A^{-1}$ est inversible et exprimer sa matrice inverse à partir de A, A^{-1}et I

Exercice 7 (4 pts) :

A désigne une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et x un élément du corps précédent

1) Montrer par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que :

$$(A + x\ I)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\ x^{p-k}\ A^k$$

2) On suppose dans cette question que $A^3 = A$. Exprimer plus simplement : $(A + 2\ I)^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
3) On suppose dans cette question que $A^3 = A + I$. Montrer que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et de ses puissances (on posera par convention $A^0 = I$)

Correction

Exercice 1 :

a) Partons d'une combinaison linéaire nulle :

$$x\begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3\\0\\2\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\4\\6\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+3\,y-z=0\\2\,x\quad+4\,z=0\\4\,x+2\,y+6\,z=0\\3\,x+\;y-5\,z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\,z\\y=z\\-8\,z+2\,z+6\,z=0\\-6\,z+\;z+5\,z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\,z\\y=z\end{cases}$$

On peut donc prendre le jeu de coefficients non triviaux $(x,y,z)=(-2,1,1)$. La famille est donc liée.

b) On a :

$E_3=2\,E_1-E_2$

Et la famille (E_1,E_2) est libre car E_2 a sa seconde composante nulle et pas E_1 .Donc (E_1,E_2) est une base de $Vect[E_1,E_2,E_3]$

Exercice 2 :

a) la base canonique est :

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

b) la base canonique est :

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&i\end{pmatrix}\right\}$$

Exercice 3 :

a)

$$(x,y,z)\in N(f)\Leftrightarrow f(x,y,z)=(0,0)$$

$$\Leftrightarrow(x-2\,y-z,3\,x+y+z)=(0,0)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\,y-z=0\\3\,x+y+z=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2\,y = z \\ 3\,x + y = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7\,y = -4\,z \\ 7\,x = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{4}{7}\,z \\ x = -\dfrac{1}{7}\,z \end{cases}$$

Donc :

$$N(f) = \left\{\left(-\frac{1}{7}\,z, -\frac{4}{7}\,z, z\right), z \in \mathbb{R}\right\} = Vect\left[\left(-\frac{1}{7}, -\frac{4}{7}, 1\right)\right] = Vect[(-1,-4,7)]$$

b) On a

$$f(1,0,0) = (1,3) = 1.(1,0) + 3.(0,1)$$

$$f(0,1,0) = (-2,1) = -2.(1,0) + 1.(0,1)$$

$$f(0,0,1) = (-1,1) = -1.(1,0) + 1.(0,1)$$

D'où la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 4</u> :

a) On cherche le noyau de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,x - y = 0 \\ -x + 2\,y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

Donc le noyau est réduit au vecteur nul

b) Le théorème du rang donne :

$$\dim\big(Im(f)\big) + dim\big(N(f)\big) = 2$$

Donc :

$$\dim\big(Im(f)\big) = 2$$

Ainsi :

$$Im(f) = \mathbb{R}^2$$

c) Posons :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Alors :

$$A\,X = \lambda\,X \Leftrightarrow (A - \lambda\,I_2)\,X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ (3-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\,\lambda + 5 = 0$$

$$\Delta = 25 - 20 = 5$$

Les valeurs de λ (valeurs propres) répondant à la question sont donc :

$$\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

Détermination du sous espace propre $\mathbb{E}_{\lambda_1}$: on note d'abord que l'on a, pour $\lambda = \lambda_1$ (et $\lambda = \lambda_2$)

$$\mathbb{E}_\lambda = Ker(A - \lambda\, I)$$

Donc, $\mathbb{E}_\lambda$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$.

Ensuite, on résout, en ne gardant qu'une équation (la seconde étant liée à la première par le fait que le déterminant de la matrice est nul) :

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \ (3-\lambda_1)\, x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow \ y = \left(3 - \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) x$$

$$\Leftrightarrow \ y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, x$$

Donc :

$$\mathbb{E}_{\lambda_1} = Ve\ ct\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}\right]$$

Par une démarche analogue :

$$\mathbb{E}_{\lambda_2} = Ve\ ct\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}\right]$$

Exercice 5

a) Montrons que $\mathbb{F}$ n'est pas stable pour l'addition en considérant les deux suites de terme général :

$$U_n = 2^n, \qquad V_n = 1$$

Ces deux suites sont géométriques donc dans $\mathbb{F}$. Montrons par l'absurde que leur somme n'est pas géométrique en supposant l'existence de deux réels a et c tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : c\, a^n = 2^n + 1$$

Procédons par disjonction de cas :

1er cas : $|a| > 2$: en divisant la relation précédente par a^n on a :

$$c = \left(\frac{2}{a}\right)^n + \frac{1}{a^n}$$

Le passage à la limite conduit à $c = 0$, puis le passage à la limite dans la relation initiale conduit à $0 = +\infty$, ce qui est absurde.

2ème cas : $0 < |a| < 2$: en divisant la relation précédente par 2^n on a :

$$c \left(\frac{a}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2^n}$$

Le passage à la limite conduit à $0 = 1$, ce qui est absurde

3ème cas : $a = 0$: Le passage à la limite dans la relation initiale conduit à une absurdité

4ème cas : $a = 2$: en divisant la relation précédente par 2^n on a :

$$c = 1 + \frac{1}{2^n}$$

Par passage à la limite, on obtient : $c = 1$ puis $1 = 0$, absurde

5ème cas : $a = -2$: en divisant la relation précédente par 2^n on a :

$$c\,(-1)^n = 1 + \frac{1}{2^n}$$

Par passage à la limite, on obtient : $c = 0$ (car la suite de droite a une limite) puis $1 = 0$, absurde

b) soit $(U, V, k) \in \mathbb{G}^2 \times \mathbb{R}$ alors $\exists\, (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \forall\, n \in \mathbb{N}^2 :\ U_n = a \times 2^n,\ V_n = b \times 2^n$ donc :

$$U_n + k\, V_n = (a + k\, b) \times 2^n$$

Cette dernière suite est géométrique de raison 2 donc dans $\mathbb{G}$. $\mathbb{G}$ est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$

Exercice 6 :

Il existe une matrice telle que :

$$(I + A)\, B = I$$

En multipliant la relation à gauche par A^{-1} on obtient :

$$A^{-1}(I + A)\, B = A^{-1}\, I$$

Soit en distribuant à gauche :

$$(A^{-1} + A^{-1}A)\, B = A^{-1}$$

D'où, en multipliant à droite par A :

$$(I + A^{-1})\, B\, A = I$$

La matrice $I_n + A^{-1}$ est donc inversible et :

$$(I + A^{-1})^{-1} = B\, A = (I + A)^{-1}\, A$$

Exercice 7

1) Initialisation ($p = 0$)

$$(A + x\, I)^0 = I$$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{p}{k} x^{p-k} A^k = I$$

Donc la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang $p \in \mathbb{N}$, soit :

$$(A + x\, I)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^{p-k} A^k$$

Alors :

$$(A + x\, I)^{p+1} = (A + x\, I)\,(A + x\, I)^p$$

$$= (A + x\, I) \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^{p-k} A^k$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^{p-k} A^{k+1} + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^{p+1-k} A^k$$

$$= \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p}{k-1} x^{p+1-k} A^k + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^{p+1-k} A^k$$

$$= A^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k-1} x^{p+1-k} A^k + x^{p+1} A^0 + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} x^{p+1-k} A^k$$

$$= x^0 A^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \left(\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} \right) x^{p+1-k} A^k + x^{p+1} A^0$$

$$= \binom{p+1}{p+1} x^0 A^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p+1}{k} x^{p+1-k} A^k + \binom{p+1}{0} x^{p+1} A^0$$

$$= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} x^{p+1-k} A^k$$

Donc la propriété est vraie au rang $p + 1$

2) on a

$$(A + 2\, I)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\ 2^{p-k}\ A^k$$

Où les valeurs de A^k sont A^2, A, I

Donc $(A + 2\, I)^p$ est de la forme :

$$(A + 2\, I)^p = x_p\, A^2 + y_p\, A + z_p\, I$$

On peut voir aussitôt dans le développement qui précède que : $z_p = 2^p$. Pour les autres coefficients, nous allons chercher une relation de récurrence.

$$(A + 2\, I)^{p+1} = (A + 2\, I)\left(x_p\, A^2 + y_p\, A + 2^p\, I\right)$$

$$= x_p\, A^3 + \left(y_p + 2\, x_p\right) A^2 + \left(2^p + 2\, y_p\right) A + 2^{p+1}\, I$$

$$= \left(y_p + 2\, x_p\right) A^2 + \left(2^p + x_p + 2\, y_p\right) A + 2^{p+1}\, I$$

Donc :

$$\begin{cases} x_{p+1} = 2\, x_p + y_p \\ y_{p+1} = x_p + 2\, y_p + 2^p \end{cases}$$

Par différence entre la seconde et la première équation on a :

$$y_{p+1} - x_{p+1} = y_p - x_p + 2^p$$

Ainsi, la suite de terme général $u_p = y_p - x_p$ vérifie :

$$u_{p+1} - u_p = 2^p$$

Donc, en faisant apparaitre une somme télescopique :

$$u_p - u_0 = \sum_{k=0}^{p-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{p-1} 2^k = \frac{2^p - 1}{2 - 1} = 2^p - 1$$

Sachant :

$$u_0 = y_0 - x_0 = 0$$

Donc :

$$y_p - x_p = u_p = 2^p - 1$$

D'où en reportant dans la première équation du système précédent :

$$x_{p+1} = 3\, x_p + 2^p - 1$$

Cherchons une solution particulière à l'équation :

$$x_{p+1} = 3\, x_p + 2^p$$

Sous forme :

$$x_p^{Pt} = c \times 2^p$$

donc :

$$x_{p+1}^{Pt} = c \times 2^{p+1}$$

Soit :

$$c \times 2^{p+1} = 3\,c \times 2^p + 2^p$$

D'où :

$$2\,c = 3\,c + 1$$

Donc :

$$c = -1$$

Cherchons ensuite une solution particulière à l'équation :

$$x_{p+1} = 3\,x_p - 1$$

Sous forme :

$$x_p^{Pt} = c$$

donc :

$$x_{p+1}^{Pt} = c$$

Soit :

$$c = 3\,c - 1$$

Donc :

$$c = \frac{1}{2}$$

Une solution particulière de l'équation initiale est alors :

$$x_p^{Pt} = \frac{1}{2} - 2^p$$

Considérons maintenant l'équation homogène associée :

$$x_{p+1} = 3\,x_p$$

La solution générale est donnée par les suites géométriques de raison 3. On en déduit la solution de l'équation initiale :

$$x_p = k \times 3^p + \frac{1}{2} - 2^p$$

Sachant :

$$x_0 = 0$$

Donc :

$$k + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

D'où :

$$k = \frac{1}{2}$$

Ainsi :

$$x_p = \frac{3^p + 1}{2} - 2^p$$

$$y_p = \frac{3^p + 1}{2} - 1 = \frac{3^p - 1}{2}$$

D'où :

$$\boxed{(A + 2\,I)^p = \left(\frac{3^p + 1}{2} - 2^p\right) A^2 + \frac{3^p - 1}{2}\ A + 2^p\,I}$$

On vérifie avec les premières puissances :

$$(A + 2\,I)^0 = I$$

$$(A + 2\,I)^1 = A + 2\,I$$

$$(A + 2\,I)^2 = A^2 + 4\,A + \ 4\,I$$

$$(A + 2\,I)^2 = 6\,A^2 + 13\,A + \ 8\,I$$

3)

$$A^3 = A + I$$

$$A^3 - A = I$$

$$A\,(A^2 - I) = I$$

$$A^{-1} = \ A^2 - I$$