Devoir Maison AI2 – Novembre 2018

Enseignant (L.GRY)

Dans tout ce devoir, $\mathbb{E}$ désigne un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$

Exercice I (6,5 points)

Soit $(f,g) \in \left(End(\mathbb{E})\right)^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on définit les applications somme $h = f + g$, produit externe $k = \alpha\, f$ et composée $l = f \circ g$ comme suit :

$$\forall\, \vec{u} \in \mathbb{E} : \begin{cases} h(\vec{u}) = f(\vec{u}) + g(\vec{u}) \\ k(\vec{u}) = \alpha\, f(\vec{u}) \\ l(\vec{u}) = f\big(g(\vec{u})\big) \end{cases}$$

1) Montrer que h, k, l sont des endomorphismes de $\mathbb{E}$
2) Montrer que :
$$f \circ (\alpha\, g) = (\alpha\, f) \circ g = \alpha\,(f \circ g)$$
3) Soit $(f_1, f_2, g_1, g_2) \in \left(End(\mathbb{E})\right)^4$, montrer que :
$$(f_1 + f_2) \circ (g_1 + g_2) = f_1 \circ g_1 + f_1 \circ g_2 + f_2 \circ g_1 + f_2 \circ g_2$$
4) Soit $p \in End(\mathbb{E})$, on pose : $s = 2\,p - Id$ où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{E}$. Montrer que :
$$p\ projecteur\ (= idempotente) \Leftrightarrow\ s\ symétrie\ (= involutive)$$
Faire un dessin dans un plan vectoriel pour illustrer cette propriété.
5) Soit s une symétrie vectorielle de $\mathbb{E}$, montrer que l'endomorphisme $f = -s$ est également une symétrie de $\mathbb{E}$
6) On se place, pour cette question seulement, dans le cas où $\mathbb{E} = Vect[\vec{\imath}, \vec{\jmath}]$ est un plan vectoriel de base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note $\vec{k} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$, $\vec{l} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\mathbb{V}_1 = Vect[\vec{\imath}]$, $\mathbb{V}_2 = Vect[\vec{\jmath}]$, $\mathbb{V}_3 = Vect[\vec{k}]$, $\mathbb{V}_3 = Vect[\vec{l}]$
Soit p la projection sur $\mathbb{V}_1$ parallèlement à $\mathbb{V}_2$ et s la symétrie par rapport à $\mathbb{V}_3$ parallèlement à $\mathbb{V}_4$.

   Illustrer par un dessin que : $p \circ s \neq s \circ p$ puis le prouver

Exercice II (6 points)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f\,(x,y,z) = \ (a\,x + b\,y - b\,z, b\,x + a\,y + b\,z, -b\,x + b\,y + a\,z)$$

1) Montrer que f est linéaire
2) Déterminer tous les couples (a,b) pour lesquels f est une symétrie
3) On considère le couple (a,b) de la question 2) tel que $a > 0$ et $b \neq 0$.
Déterminer les sous espaces vectoriels $\mathbb{V}_1$ et $\mathbb{V}_2$ tels que f soit la symétrie par rapport à $\mathbb{V}_1$ parallèlement à $\mathbb{V}_2$ (On donnera une base pour chaque sous espace).

Exercice III (7,5 points)

Soit $k \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ formé par les polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 et soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par :

$$\forall\, P(X) \in \mathbb{R}_3[X]\,;\, f(P(X)) = (1 - X)\, P'(X) + k\, P(X)$$

1) Déterminer les valeurs de k telles que f ne soit pas injective (on pourra poser : $P(X) = a_0 + a_1\, X + a_2\, X^2 + a_3\, X^3$ et utiliser la caractérisation de l'injectivité par le fait que le noyau de f est réduit au vecteur nul.
2) Pour chacune des valeurs de k obtenues au 1), donner une équation du noyau, puis une base du noyau et la dimension de l'image de f
3) Donner la matrice de f relativement à la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$

Correction

Exercice 1 :

1) Soit $(\vec{u},\vec{v},x) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{R}$ alors :

$$h(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}+\vec{v}) + g(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) + g(\vec{u}) + g(\vec{v})$$
$$= f(\vec{u}) + g(\vec{u}) + f(\vec{v}) + g(\vec{v}) = h(\vec{u}) + h(\vec{v})$$
$$h(x\,\vec{u}) = f(x\,\vec{u}) + g(x\,\vec{u}) = x\,f(\vec{u}) + x\,g(\vec{u}) = x\left(f(\vec{u}) + g(\vec{u})\right) = x\,h(\vec{u})$$

donc h est linéaire

$$k(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\,f(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\left(f(\vec{u}) + f(\vec{v})\right) = \alpha\,f(\vec{u}) + \alpha\,f(\vec{v}) = k(\vec{u}) + k(\vec{v})$$
$$k(x\,\vec{u}) = \alpha\,f(x\,\vec{u}) = \alpha\left(x\,f(\vec{u})\right) = x\left(\alpha\,f(\vec{u})\right) = x\,k(\vec{u})$$

donc k est linéaire

$$l(\vec{u}+\vec{v}) = f\big(g(\vec{u}+\vec{v})\big) = f\big(g(\vec{u}) + g(\vec{v})\big) = f\big(g(\vec{u})\big) + f\big(g(\vec{v})\big) = l(\vec{u}) + l(\vec{v})$$
$$l(x\,\vec{u}) = f\big(g(x\,\vec{u})\big) = f\big(x\,g(\vec{u})\big) = x\,f\big(g(\vec{u})\big) = x\,l(\vec{u})$$

donc l est linéaire

2) On a pour tout $\vec{u}$ de $\mathbb{E}$:

$$f \circ (\alpha\,g)(\vec{u}) = f\big((\alpha\,g)(\vec{u})\big) = f\big(\alpha\,g(\vec{u})\big) = \alpha\,f\big(g(\vec{u})\big) = \alpha\left(f \circ g(\vec{u})\right) = (\alpha\,f) \circ g(\vec{u})$$

3) On a pour tout $\vec{u}$ de $\mathbb{E}$:

$$(f_1 + f_2) \circ (g_1 + g_2)(\vec{u}) = (f_1 + f_2)\left((g_1 + g_2)(\vec{u})\right)$$
$$= f_1\left((g_1 + g_2)(\vec{u})\right) + f_2\big((g_1 + g_2)(\vec{u})\big)$$
$$= f_1\left(g_1(\vec{u}) + g_2(\vec{u})\right) + f_2\left(g_1(\vec{u}) + g_2(\vec{u})\right)$$
$$= f_1\left(g_1(\vec{u})\right) + f_1\left(g_2(\vec{u})\right) + f_2\left(g_1(\vec{u})\right) + f_2\left(g_2(\vec{u})\right)$$
$$f_1 \circ g_1(\vec{u}) + f_1 \circ g_2(\vec{u}) + f_2 \circ g_1(\vec{u}) + f_2 \circ g_2(\vec{u})$$

4) Supposons p projecteur c'est-à-dire : $p \circ p = p$ alors :

$$s \circ s = (2\,p - Id) \circ (2\,p - Id) = 2\,p \circ 2\,p - 2\,p \circ Id - Id \circ 2\,p + Id \circ Id$$
$$= 4\,p - 2\,p - 2\,p + Id = Id$$

Donc s est involutive. C’est donc une symétrie

Supposons réciproquement s symétrie c'est-à-dire : $s \circ s = Id$ alors :

$$2\,p \circ 2\,p = (s + Id) \circ (s + Id) = s \circ s + s \circ Id + Id \circ s + Id \circ Id$$
$$= Id + s + s + Id = 2\,p$$

Donc :

$$p \circ p = p$$

Donc p est idempotente. C’est donc un projecteur

5) On a :

$$-s \circ -s = s \circ s = Id$$

Donc $-s$ est involutive. C'est donc une symétrie

6) Il suffit de noter :

$$s \circ p(\vec{k}) = s\left(p(\vec{k})\right) = s(\vec{\imath}) = \vec{\jmath}$$

$$p \circ s(\vec{k}) = p\left(s(\vec{k})\right) = p(\vec{k}) = \vec{\imath}$$

Donc :

$$s \circ p(\vec{k}) \neq p \circ s(\vec{k})$$

Exercice II

1) Soit $\left((x,y,z),(x',y',z'),k\right) \in (\mathbb{R}^3)^2 \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f\left((x,y,z)+(x',y',z')\right) &= f(x+x',y+y',z+z') \\
&= \big(a\,(x+x')+b\,(y+y')-b\,(z+z'),b\,(x+x')+a\,(y+y')+b\,(z+z'),-b\,(x+x') \\
&\quad +b\,(y+y')+a\,(z+z')\big) \\
&= (a\,x+b\,y-bz,b\,x+a\,y+b\,z,-b\,x+b\,y+a\,z) \\
&\quad +(a\,x'+b\,y'-bz',b\,x'+a\,y'+b\,z',-b\,x'+b\,y'+a\,z') \\
&= f(x,y,z)+f(x',y',z')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f\left(k\,(x,y,z)\right) &= f(k\,x,k\,y,k\,z) \\
&= (a\,k\,x+b\,k\,y-b\,k\,z,b\,k\,x+a\,k\,y+b\,k\,z,-b\,k\,x+b\,k\,y+a\,k\,z) \\
&= k\,(a\,x+b\,y-bz,b\,x+a\,y+b\,z,-b\,x+b\,y+a\,z) \\
&= k\,f(x,y,z)
\end{aligned}$$

Donc f est linéaire

2) Rappelons d'abord :

f est une symétrie si et seulement si elle vérifie : $f \circ f = Id$

Or pour tout (x,y,z) de $(\mathbb{R}^3)$:

$$f \circ f(x,y,z)$$

$$= f(a\,x+b\,y-bz,b\,x+a\,y+b\,z,-b\,x+b\,y+a\,z)$$

$$\begin{aligned}
= \big(&a\,(a\,x+b\,y-bz)+b\,(b\,x+a\,y+b\,z)-b\,(-b\,x+b\,y+a\,z),b\,(a\,x+b\,y-bz) \\
&+a\,(b\,x+a\,y+b\,z)+b\,(-b\,x+b\,y+a\,z),-b\,(a\,x+b\,y-bz) \\
&+b\,(b\,x+a\,y+b\,z)+a(-b\,x+b\,y+a\,z)\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \big(&(a^2+2\,b^2)\,x+(2\,a\,b-b^2)\,y-(2\,a\,b-b^2)\,z,(2\,a\,b-b^2)\,x+(a^2+2\,b^2)\,y \\
&+(2\,a\,b-b^2)\,z,-(2\,a\,b-b^2)\,x+(2\,a\,b-b^2)\,y+(a^2+2\,b^2)\,z\big)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ f \circ f(x,y,z) = (x,y,z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2\,b^2 = 1 \\ 2\,a\,b - b^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b = 0 \end{cases} ou \ \begin{cases} a^2 + 2\,b^2 = 1 \\ b = 2\,a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} ou \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \ ou \ \begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{9} \\ b = 2\,a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} ou \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \ ou \ \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{2}{3} \end{cases} ou \ \begin{cases} a = -\dfrac{1}{3} \\ b = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

3) Le couple concerné est $(a,b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$\mathbb{V}_1$ est l'espace vectoriel formé par les vecteurs invariants de f. Pour le déterminer, il faut résoudre :

$$f(x,y,z) = (x,y,z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3}\,x + \dfrac{2}{3}\,y - \dfrac{2}{3}\,z \ = x \\ \dfrac{2}{3}\,x + \dfrac{1}{3}\,y + \dfrac{2}{3}\,z = y \\ -\dfrac{2}{3}\,x + \dfrac{2}{3}\,y + \dfrac{1}{3} z = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2\,y - 2\,z \ = 3\,x \\ 2\,x + \ y + 2\,z = 3\,y \\ -2\,x + 2\,y + z = 3\,z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\,x + 2\,y - 2\,z \ = 0 \\ 2\,x - 2\ y + 2\,z = 0 \\ -2\,x + 2\,y - 2\,z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ x - y + z = 0$$

$$\Leftrightarrow \ x = y - z$$

Donc, en prenant y et z comme paramètres :

$$\mathbb{V}_1 = \{(y - z, y, z) : \ (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \{y\,(1,1,0) + z\,(-1,0,1) : \ (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= Vect[(1,1,0), (-1,0,1)]$$

Les deux vecteurs $(1,1,0), (-1,0,1)$ formant une famille libre, ils forment une base de $\mathbb{V}_1$ qui est donc un plan vectoriel.

$\mathbb{V}_2$ est l'espace vectoriel formé par les vecteurs ayant pour image leur opposé. Pour le déterminer, il faut résoudre :

$$f(x, y, z) = (-x, -y, -z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}\, x + \frac{2}{3}\, y - \frac{2}{3}\, z\ = -x \\ \frac{2}{3}\, x + \frac{1}{3}\, y + \frac{2}{3}\, z = -y \\ -\frac{2}{3}\, x + \frac{2}{3}\, y + \frac{1}{3} z = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2\, y - 2\, z\ = -3\, x \\ 2\, x + \ y + 2\, z = -3\, y \\ -2\, x + 2\, y + z = -3\, z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\, x + 2\, y - 2\, z\ = 0\ (I) \\ 2\, x + 4\ \ y + 2\, z = 0\ (II) \\ -2\, x + 2\, y + 4\, z = 0\ (III = II - I) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\, x + y - z = 0 \\ x + 2\, y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\, x + y = z \\ x + 2\, y = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$$

Donc, en prenant z comme paramètre :

$$\mathbb{V}_2 = \{(z, -z, z) :\ z \in \mathbb{R}\} = \{z\,(1, -1, 1) :\ z \in \mathbb{R}\}$$

$$= Vect[(1, -1, 1)]$$

Le vecteur non nul $(1, -1, 1)$ forme une base de $\mathbb{V}_2$ qui est donc une droite vectorielle.

Exercice III

1) Soit $P(X) = a_0 + a_1\, X + a_2\, X^2 + a_3\, X^3$

$$P(X) \in N(f)\ \Leftrightarrow\ f\big(P(X)\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (1 - X)\, P'(X) + k\, P(X)\ = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (1 - X)\, (a_1\ + 2\, a_2\, X + 3\, a_3\, X^2) + k\, (a_0 + a_1\, X + a_2\, X^2 + a_3\, X^3)\ = 0$$

$$\Leftrightarrow\ a_1 + k\, a_0 + (2\, a_2 + (k - 1)\, a_1)\, X + (3\, a_3 + (k - 2)\, a_2)\, X^2 + (k - 3\ )\, a_3\, X^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + k\, a_0 = 0 \\ 2\, a_2 + (k-1)\, a_1 = 0 \\ 3\, a_3 + (k-2)\, a_2 = 0 \\ (k-3)\, a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -k\, a_0 \\ a_2 = \dfrac{k(k-1)}{2}\, a_0 \\ a_3 = -\dfrac{k(k-1)(k-2)}{6}\, a_0 \\ \dfrac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{6}\, a_0 = 0 \end{cases}$$

Pour que ce système admette une solution autre que le polynôme nul il faut et il suffit que l'on ait :

$$k \in \{0,1,2,3\}$$

2)

a) Pour $k = 0$ une équation du noyau est :

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$N(f) = Vect[1]$$

Et par le théorème du rang :

$$dim\big(Im(f)\big) = dim(\mathbb{R}_3[X]) - dim\big(N(f)\big) = 4 - 1 = 3$$

b) Pour $k = 1$ une équation du noyau est :

$$\begin{cases} a_1 = -\, a_0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$N(f) = Vect[1 - X]$$

Et par le théorème du rang :

$$dim\big(Im(f)\big) = 4 - 1 = 3$$

c) Pour $k = 2$ une équation du noyau est :

$$\begin{cases} a_1 = -2\, a_0 \\ a_2 = a_0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$N(f) = Vect[1 - 2\,X + X^2]$$

Et par le théorème du rang :

$$dim\big(Im(f)\big) = 4 - 1 = 3$$

d) Pour $k = 3$ une équation du noyau est :

$$\begin{cases} a_1 = -3\,a_0 \\ a_2 = 3\,a_0 \\ a_3 = -\,a_0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$N(f) = Vect[1 - 3\,X + 3\,X^2 - X^3]$$

Et par le théorème du rang :

$$dim\big(Im(f)\big) = 4 - 1 = 3$$

3) On a :

$$f(1) = (1 - X) \times 0 + k \times 1 = k.1 + 0.X + 0.X^2 + 0.X^3$$

$$f(X) = (1 - X) \times 1 + k\,X = 1.1 + (k-1).X + 0.X^2 + 0.X^3$$

$$f(X^2) = (1 - X) \times 2\,X + k\,X^2 = 0.1 + 2.X + (k-2).X^2 + 0.X^3$$

$$f(X^3) = (1 - X) \times 3\,X^2 + k\,X^3 = 0.1 + 0.X + 3.X^2 + (k-3).X^3$$

On en déduit la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (k-1) & 2 & 0 \\ 0 & 0 & (k-2) & 3 \\ 0 & 0 & 0 & (k-3) \end{pmatrix}$$