***Devoir Maison AI1 – 2019***

***Mathématiques***

Exercice 1 (4 pts) :

Dans tout le problème , $n$ désigne un entier supérieur ou égal à 1.

a) Montrer par récurrence l'inégalité suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} i\, 2^i \geq (n+1)\,(2^n - 1)$$

b) i. Pour $x > 1$, on note $f(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i$. Montrer que :

$$f(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

ii. Calculer $f'(x)$ de deux façons et en déduire une expression sans le signe somme de $\sum_{i=1}^{n} i\, 2^i$

iii. Retrouver ainsi le résultat de la question a)

Exercice 2 (8 pts)

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}$ l'ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $(f, g) \in \mathcal{A}^2$ on dit que $f$ est conjuguée à $g$ si :

$$\exists\, \varphi \in \mathcal{B} : g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

1) Montrer que si $f$ est conjuguée à $g$ alors $g$ est conjuguée à $f$. On dira alors de $f$ et $g$ qu'elles sont conjuguées.
2) Déterminer toutes les applications qui sont conjuguées avec l'application identité définie par $Id : x \to x$
3) Déterminer toutes les applications qui sont conjuguées avec l'application nulle définie par $N : x \to 0$
4) Donner un exemple de couple $(f, \varphi) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tel que : : $f = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ et $\varphi \neq Id$
5) Pour $f \in \mathcal{A}$ on désigne par $C_f$ l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{B}$ vérifiant : $f = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$
   a) Montrer que $C_f$ n'est pas vide
   b) Soit $(\varphi, \psi) \in {C_f}^2$. Montrer que $\varphi^{-1}$ et $\varphi \circ \psi$ restent dans $C_f$
6) Dans cette question, les applications $f$ et $g$ sont conjuguées.
   a) Prouver : $f$ injective $\Leftrightarrow$ $g$ injective
   b) Prouver : $f$ surjective $\Leftrightarrow$ $g$ surjective
   c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ où $f$ apparait $n$ fois. Montrer que $f^n$ et $g^n$ sont conjuguées.
7) Montrer que les applications : $f : x \to e^x$ et $g : x \to e^{x+1} - 1$ sont conjuguées.

Exercice 3 (8 pts)

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = x\, sh\left(\frac{1}{x}\right)$$

1) Donner le domaine de définition de $f$
2) Etudier la parité de $f$
3) Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition
4) Montrer que l'on a : $\forall\, t \in ]0, +\infty[\ : th(t) < t$
5) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f$ et calculer sa dérivée.
6) Etudier le signe de cette dérivée et établir le tableau de variations de $f$
7) Déterminer l'équation réduite de la tangente à l'abscisse 1 et étudier la position de la courbe par rapport à cette tangente
8) Donner l'allure de la courbe de $f$ dans un repère orthonormé.

Correction

Exercice 1

a)

Initialisation : pour $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} i\, 2^i = 2$$

$$(1+1)\,(2^1 - 1) = 2$$

La propriété est donc vraie au rang 1

Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang $n$ soit :

$$\sum_{i=1}^{n} i\, 2^i \geq (n+1)\,(2^n - 1)$$

Alors :

$$\sum_{i=1}^{n+1} i\, 2^i = \sum_{i=1}^{n} i\, 2^i + (n+1)\, 2^{n+1} \geq (n+1)\,(2^n - 1) + (n+1)\, 2^{n+1}$$

$$= (n+1)\left((2^n - 1) + 2^{n+1}\right)$$

$$= (n+1)\, 2^n + (n+1)\,(2^{n+1} - 1)$$

Or :

$$n + 1 \geq 2$$

Donc :

$$(n+1)\, 2^n \geq 2 \times 2^n = 2^{n+1} \geq 2^{n+1} - 1$$

D'où :

$$\sum_{i=1}^{n+1} i\, 2^i \geq 2^{n+1} - 1 + (n+1)\,(2^{n+1} - 1) = (n+2)\,(2^{n+1} - 1)$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$

b) i) On a, en faisant apparaitre une somme télescopique :

$$(x-1)\, f(x) = (x-1) \sum_{i=0}^{n} x^i = \sum_{i=0}^{n} \left(x^{i+1} - x^i\right) = x^{n+1} - x^0 = x^{n+1} - 1$$

ii) D'où :

$$f(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

On a d'une part, en dérivant terme à terme sous le signe somme :

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} i\, x^{i-1}$$

D'autre part, en dérivant la fraction rationnelle :

$$f'(x) = \frac{(n+1)\, x^n\, (x-1) - (x^{n+1} - 1) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{n\, x^{n+1} - (n+1)\, x^n + 1}{(x-1)^2}$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{n} i\, x^{i-1} = \frac{n\, x^{n+1} - (n+1)\, x^n + 1}{(x-1)^2}$$

iii) en prenant $x = 2$ dans l'expression précédente, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} i\, 2^{i-1} = n\, 2^{n+1} - (n+1)\, 2^n + 1$$

Et en multipliant par 2 les deux membres :

$$\sum_{i=1}^{n} i\, 2^{i} = n\, 2^{n+2} - (n+1)\, 2^{n+1} + 2 = 2^{n+1} \big(2\, n - (n+1)\big) + 2$$

$$= 2^{n+1}\, (n-1) + 2$$

On étudie la différence :

$$2^{n+1}\, (n-1) + 2 - (n+1)\, (2^n - 1) = 2^{n+1}\, (n-1) - (n+1)\, 2^n + 2 + (n+1)$$

$$= 2^n \big(2(n-1) - (n+1)\big) + (n+3)$$

$$= 2^n\, (n-3) + (n+3)$$

La quantité est positive ou nulle pour $n \geq 3$ et on vérifie aisément qu'il en est de même pour $n = 1$ et $n = 2$. On retrouve ainsi le résultat de la question a)

Exercice 2 :

1) si $f$ est conjuguée à $g$ alors

$$\exists\, \varphi \in \mathcal{B} : g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

Donc :

$$\varphi^{-1} \circ g \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = f$$

Donc $g$ est conjuguée à $f$

2) $f$ et $Id$ sont conjuguées si et seulement si :

$$\exists\ \varphi \in \mathcal{B} : f = \varphi \circ Id \circ \varphi^{-1} = Id$$

Donc seule l'application $Id$ est conjuguée avec $Id$

3) $f$ et $N$ sont conjuguées si et seulement si :

$$\exists\ \varphi \in \mathcal{B} : f = \varphi \circ N \circ \varphi^{-1} = N$$

Donc seule l'application $N$ est conjuguée avec $N$

4) On prend $\varphi$ définie par $\varphi(x) = x + 1$ ainsi $\varphi^{-1}(x) = x - 1$ et $f$ définie par $f(x) = x + 2$

5)

a) $Id \in C_f$

b)

Soit $\varphi \in C_f$ alors :

$$f = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

Donc :

$$\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = f$$

D'où $\varphi^{-1} \in C_f$

Soit $(\varphi, \psi) \in {C_f}^2$ alors :

$$f = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}, f = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$$

Donc :

$$f = \varphi \circ (\psi \circ f \circ \psi^{-1}) \circ \varphi^{-1} = (\varphi \circ \psi) \circ f \circ (\varphi \circ \psi)^{-1}$$

Or $\varphi \circ \psi \in \mathcal{B}$ donc $\varphi \circ \psi \in C_f$

6)

a) Supposons $f$ injective alors :

$$g(x) = g(y) \Rightarrow \varphi\left(f\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right) = \varphi\left(f\left(\varphi^{-1}(y)\right)\right)$$
$$\Rightarrow f\left(\varphi^{-1}(x)\right) = f\left(\varphi^{-1}(y)\right)$$
$$\Rightarrow \varphi^{-1}(x) = \varphi^{-1}(y)$$
$$\Rightarrow x = y$$

Donc $g$ est injective. La réciproque est évidente

b) Supposons $f$ surjective et notons d'abord ceci :

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = \varphi\left(f\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi^{-1}(y) = f\big(\varphi^{-1}(x)\big)$$

Soit alors $y \in \mathbb{R}$. Par surjectivité de $f$, il existe $z \in \mathbb{R} : \varphi^{-1}(y) = f(z)$ et par bijectivité de $\varphi^{-1}$, il existe $x \in \mathbb{R} : z = \varphi^{-1}(x)$. Ainsi : $y = g(x)$ et $g$ est surjective.

c) On démontre la propriété suivante par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Si $\exists\, \varphi \in \mathcal{B} : g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ alors $g^n = \varphi \circ f^n \circ \varphi^{-1}$

L'initialisation est triviale pour $n = 0$. On suppose la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$g^{n+1} = g^n \circ g = (\varphi \circ f^n \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}) = \varphi \circ f^n \circ f \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ f^{n+1} \circ \varphi^{-1}$$

Donc la propriété est vraie pour l'entier $n + 1$, ce qui achève la démonstration.

7) Définissons $\varphi$ par : $\varphi(x) = x - 1$ soit $\varphi^{-1}(x) = x + 1$ alors : $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ donc les deux applications sont conjuguées

Exercice 3

1) $D_f = \mathbb{R}^*$

2) soit $x \in \mathbb{R}^*$ alors :

$$f(-x) = -x\, sh\left(\frac{1}{-x}\right) = x\, sh\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

Donc $f$ est paire

3) On a :

En $0^+$ :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{y \to +\infty} sh(y) = +\infty$$

Donc par composée :

$$\lim_{x \to 0^+} sh\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

Donc la limite de $f$ est une forme indéterminée.

Pour lever l'indétermination, posons :

$$\frac{1}{x} = t$$

Alors :

$$\lim_{x \to 0^+} x\, sh\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} sh(t)$$

Or en $+\infty$ :

$$\frac{1}{t} sh(t) \sim \frac{1}{t} \frac{e^t}{2} = \frac{e^t}{2\,t}$$

Par croissances comparées :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{2\,t} = +\infty$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0^+} x\, sh\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

En $0^-$ : Par parité :

$$\lim_{x\to 0^-} x\, sh\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

En $+\infty$ :

$$\lim_{x\to+\infty} x\, sh\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} sh(t) = sh'(0) = ch(0) = 1$$

En $-\infty$ : Par parité :

$$\lim_{x\to-\infty} x\, sh\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

4) on introduit sur $[0, +\infty[$ la fonction

$$\varphi(t) = th(t) - t$$

Sa dérivée est :

$$\varphi(t) = 1 - th^2(t) - 1 = -th^2(t) < 0\ sur\ ]0, +\infty[$$

Donc $\varphi$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ donc :

$$\forall\, t \in\ ]0, +\infty[\ :\ \varphi(t) < \varphi(0) = 0$$

D'où le résultat.

5) Par produit et composée, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$f'(x) = 1\, sh\left(\frac{1}{x}\right) + x\, \left(-\frac{1}{x^2}\right)\, ch\left(\frac{1}{x}\right) = sh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\, ch\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= ch\left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{sh\left(\frac{1}{x}\right)}{ch\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{x}\right) = ch\left(\frac{1}{x}\right)\, \left(th\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)$$

6) Or sur $]0, +\infty[$ :

$$\frac{1}{x} > 0$$

Donc :

$$ch\left(\frac{1}{x}\right) > 0, \quad th\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 0$$

D’où par produit :

$$f'(x) < 0$$

Donc $f$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et par parité, strictement croissante sur $]-\infty, 0[$

7) On a :

$$T_1 : \; y = \; f'(1)(x-1) + f(1)$$

Or :

$$f(1) = sh(1)$$

$$f(1) = ch(1)(th(1) - 1) = sh(1) - ch(1)$$

D’où l’équation :

$$y = \big(sh(1) - ch(1)\big)\, x + ch(1)$$

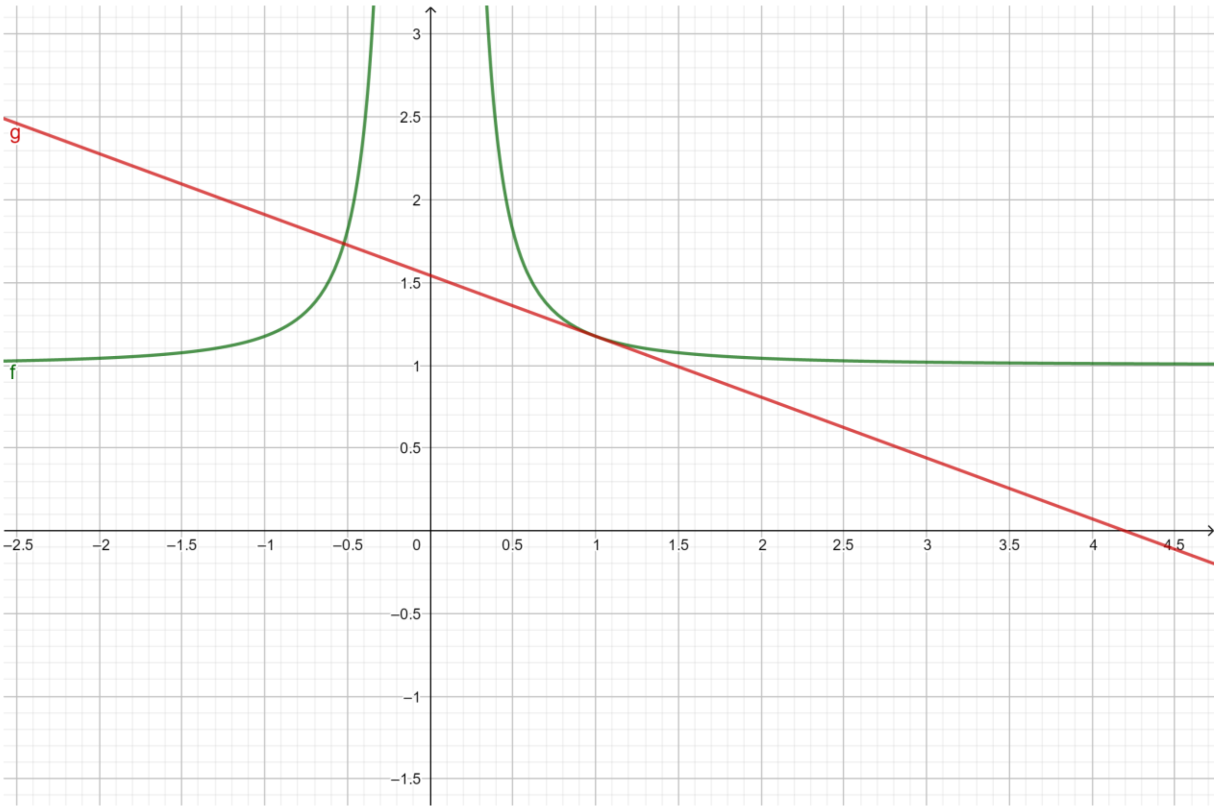
Pour la position, on calcule la dérivée seconde de $f$ :

$$f"(x) = -\frac{1}{x^2} ch\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} ch\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) sh\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^3}\, sh\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc sur $\mathbb{R}^*$ :

$$f"(x) > 0$$

$f$ est donc strictement convexe sur $]0, +\infty[$ donc sa courbe est strictement au-dessus de sa tangente en 1 sur ce domaine en dehors du point d’abscisse 1. Sur $]-\infty, 0[$ la tangente coupe la courbe en un point unique d’abscisse $\propto < 0$ et la courbe est strictement sous la tangente sur $]-\infty, \propto[$ et strictement au-dessus sur $]\propto, 0[$. Un traceur de courbe comme Geogebra permet d’obtenir une valeur approchée de $\propto \approx -0{,}52$.



g
f
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5