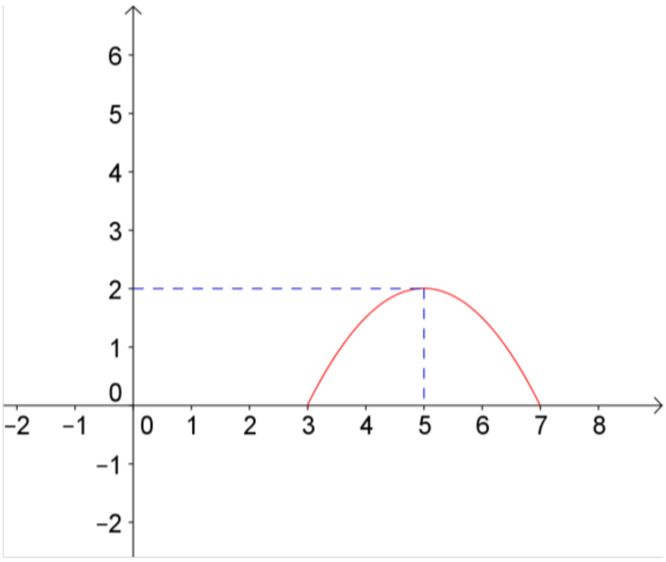
Devoir Maison AI1 – Novembre 2018

Enseignant (L.GRY)

<u>Exercice I (8 points)</u>

On considère la portion de parabole d'équation $y = f(x)$ dont la courbe représentative dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous :



1) En exploitant les informations du graphique, donner la forme factorisée de $f(x)$ puis en déduire sa forme développée
2) On note f_1 la bijection définie par la courbe précédente de l'intervalle $[3; 5]$ dans l'intervalle $[0; 2]$ et f_2 la bijection définie par la même courbe de l'intervalle $[5; 7]$ dans l'intervalle $[0; 2]$ Déterminer, en fonction de $y \in [0; 2]$ les expressions de $f_1^{-1}(y)$ et de $f_2^{-1}(y)$
3) Donner les domaines de définition des dérivées des réciproques f_1^{-1} et f_2^{-1} puis calculer les expressions de ces fonctions dérivées $(f_1^{-1})'(y)$ et $(f_2^{-1})'(y)$ de deux façons :
   - A partir des expressions obtenues au 2)
   - En utilisant la formule générale de dérivation d'une application réciproque

<u>Exercice II (12 points)</u>

Dans cet exercice, a, b, c, d désignent 4 réels tels que : , $a < b$ et , $c < d$

1) Soit f la fonction de $[0; 1]$ dans $[a; b]$ définie par :

$$\forall\, t \in [0; 1] : f(t) = (1-t)a + t\, b$$

Montrer que f réalise une bijection de $[0; 1]$ dans $[a; b]$ de deux façons :

- 1ère façon : En montrant que f est injective et surjective sans utiliser le tableau de variation de f
- 2ème façon : en dressant le tableau de variation de f

2) Déterminer l'expression de la fonction réciproque f^{-1} pour tout $x \in [a; b]$
3) Soit g la fonction de $[0; 1]$ dans $[c; d]$ définie par :

$$\forall\, t \in [0; 1] : g(t) = (1-t)\, c + t\, d$$

Et soit h la fonction de $[c; d]$ dans $[a; b]$ définie par :

$$\forall\, x \in [c; d] : h(x) = f\left(g^{-1}(x)\right)$$

a) Montrer sans utiliser les expressions de f et g^{-1} que h réalise une bijection de de $[c; d]$ dans $[a; b]$
b) Donner l'expression de $h(x)$

4) Soit k la fonction de $[0; +\infty[$ dans $[a; b[$ définie par :

$$\forall\, t \in [0; +\infty[: k(t) = e^{-t}\, a + (1 - e^{-t})\, b$$

Montrer que k réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans $[a; b[$ par la méthode de son choix et donner l'expression de la réciproque

5) Déterminer l'expression d'une fonction l qui réaliserait une bijection de $]-\infty; 0]$ dans $]a; b]$
6) On rappelle que la fonction tangente tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $]-\infty; +\infty[$

a) Déterminer une fonction affine croissante réalisant une bijection entre $]a; b[$ et $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
b) En déduire l'expression d'une fonction réalisant une bijection entre $]a; b[$ et $]-\infty; +\infty[$

Correction :

Exercice I

1) La fonction admet une forme factorisée de la forme :

$$f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

Du graphique, on tire les informations :

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = 7, \;\; f(5) = 2$$

On en déduit :

$$a\,(5 - 3)\,(5 - 7) = 2$$

Soit :

$$a = -\frac{1}{2}$$

D'où la forme factorisée :

$$f(x) = \frac{1}{2}\,(x - 3)\,(x - 7)$$

Puis la forme développée :

$$f(x) = -\frac{1}{2}\,(x^2 - 10\,x + 21) = -\frac{1}{2}\,x^2 + 5\,x - \frac{21}{2}$$

2) On a :

$$\forall\, y \in [0; 2] :$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow \; y = -\frac{1}{2}\,(x^2 - 10\,x + 21)$$

$$\Leftrightarrow -2\,y = x^2 - 10\,x + 21$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 10\,x + 21 + 2\,y$$

Le discriminant de ce trinôme de la variable x est :

$$\Delta = (-10)^2 - 4\,(1)\,(21 + 2\,y) = 100 - 4\,(21 + 2\,y) = 4\,(25 - 21 - 2\,y) = 4\,(4 - 2\,y) \geq 0$$

L'équation a donc deux racines distinctes pour $y \neq 2$ et confondues pour $y = 2$:

$$x_1(y) = \frac{10 - 2\sqrt{4 - 2\,y}}{2} = 5 - \sqrt{4 - 2\,y}$$

$$x_2(y) = \frac{10 - 2\sqrt{4 - 2\,y}}{2} = 5 + \sqrt{4 - 2\,y}$$

Comme $x_1(y) \leq x_2(y)$ on déduit du tableau de variation de f :

$$x_1(y) \in [3;5] \text{ et } x_2(y) \in [5;7]$$

D'où :

$$f_1^{-1}(y) = 5 - \sqrt{4-2\,y}$$

$$f_2^{-1}(y) = 5 + \sqrt{4-2\,y}$$

3) Puisque que la dérivée de f s'annule en 5, f_1^{-1} et f_2^{-1} ne sont pas dérivables en 2 et on a :

$$D_{f_1^{-1}} = [0;2[$$

$$D_{f_2^{-1}} = [0;2[$$

Calculons les dérivées par la première façon :

$$(f_1^{-1})'(y) = -\frac{-2}{2\sqrt{4-2\,y}} = \frac{1}{\sqrt{4-2\,y}}$$

$$(f_2^{-1})'(y) = \frac{-2}{2\sqrt{4-2\,y}} = \frac{-1}{\sqrt{4-2\,y}}$$

Calculons-les de la deuxième façon :

$$(f_1^{-1})'(y) = \frac{1}{f_1{}'\left(f_1^{-1}(y)\right)}$$

Or :

$$f_1{}'(x) = \left(-\frac{1}{2}\,x^2 + 5\,x - \frac{21}{2}\right)' = -x + 5$$

Donc :

$$(f_1^{-1})'(y) = \frac{1}{-f_1^{-1}(y) + 5} = \frac{1}{-5 + \sqrt{4-2\,y} + 5} = \frac{1}{\sqrt{4-2\,y}}$$

Un travail analogue se fait pour $(f_2^{-1})'(y)$

<u>Exercice II</u>

1) <u>Première façon</u> :
<u>Caractère injectif</u> :

$$\forall\,(t,t') \in [0;1]^2 :$$
$$f(t) = f(t') \Rightarrow (1-t)a + t\,b = (1-t')a + t'\,b$$

$$\Rightarrow t\ (b-a) + \ a = t'\ (b-a) + \ a$$
$$\Rightarrow t\ (b-a) = t'\ (b-a)$$
$$\Rightarrow t = t'$$

Donc f est injective.

<u>Caractère surjectif</u> :

$$\forall\ (t, x) \in [0; 1] \times [a; b] :$$

$$f(t) = x \Leftrightarrow\ (1-t)a + t\ b = x$$

$$\Leftrightarrow\ t\ (b-a) + \ a = x$$

$$\Leftrightarrow\ t\ (b-a) = x - a$$

$$\Leftrightarrow\ t\ = \frac{x-a}{b-a}$$

Ce raisonnement prouve que tout élément de $[a; b]$ possède au moins un antécédent, donc f est surjective. Remarquons que le raisonnement par équivalence prouve à la fois existence et unicité donc le caractère bijectif, ce qui rend inutile la preuve précédente du caractère injectif. Qui plus est ce raisonnement donne l'expression de la réciproque.

<u>Deuxième façon</u> : On dresse le tableau de variation de la fonction qui a pour dérivée :

$$f'(t) = b - a > 0$$

f est donc strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $[0; 1]$ dans $f[0; 1]$.

Or on a :

$$f(0) = a$$

$$f(1) = b$$

f étant continue sur $[0; 1]$, on en déduit :

$$f[0; 1] = [a; b]$$

2) L'étude de la surjectivité a donné l'expression de la réciproque :

$$\forall\ x \in [a; b] :\ f^{-1}(x)\ = \frac{x-a}{b-a}$$

3)

a) On a :

$$\forall\, x \in [c; d] : h(x) = g^{-1}(x) \in [0; 1]$$

Donc h est bien définie et à valeurs dans $[a; b]$

Voyons le caractère injectif, en utilisant tour à tour, le caractère injectif de f puis de g^{-1}

$$\forall\, (x, x') \in [c; d]^2 :$$
$$h(x) = h(x') \Rightarrow f\big(g^{-1}(x)\big) = f\big(g^{-1}(x')\big)$$
$$\Rightarrow g^{-1}(x) = g^{-1}(x')$$
$$\Rightarrow x = x'$$

Voyons le caractère surjectif :

soit $y \in [a; b]$ alors par caractère surjectif de f, on a :

$$\exists\, t \in [0; 1] :\ y = f(t)$$

alors par caractère surjectif de g^{-1} :

$$\exists\, x \in [a; b] :\ t = g^{-1}(x)$$

Ainsi :

$$y = f\big(g^{-1}(x)\big) = h(x)$$

Donc h est surjective et donc bijective.

b) On a :

$$\forall\, x \in [c; d] :$$
$$h(x) = f\big(g^{-1}(x)\big) = \big(1 - g^{-1}(x)\big)\, a + g^{-1}(x)\, b$$
$$= (b - a)\, g^{-1}(x) + a$$

Finalement :

$$h(x) = (b - a)\, \frac{x - c}{d - c} + a$$

4) Dérivons la fonction :

$$\forall\, t \in [0; +\infty[\ : k'(t) = -e^{-t}\, a + e^{-t}\, b = (b - a)\, e^{-t} > 0$$

k est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[0; +\infty[$ dans $k[0; +\infty[$.

Or on a :

$$k(0) = a$$

$$\lim_{x \to +\infty} k(x) = b$$

k étant continue sur $[0; +\infty]$, on en déduit :

$$k[0; +\infty] = [a; b[$$

Déterminons l'expression de la réciproque :

$$\forall\, (t, x) \in [0; +\infty[\times [a; b[:$$
$$x = k(t) \ \Leftrightarrow x = e^{-t}\, a + (1 - e^{-t})\, b$$
$$\Leftrightarrow x = b + e^{-t}\, (a - b)$$

$$\Leftrightarrow x - b = e^{-t}\,(a - b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-b}{a-b} = e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow Ln\left(\frac{x-b}{a-b}\right) = -t$$

$$\Leftrightarrow Ln\left(\frac{a-b}{x-b}\right) = t$$

Ainsi :

$$\forall\, x \in [a; b[: k^{-1}(x) = Ln\left(\frac{a-b}{x-b}\right)$$

5) On peut prendre :

$$\forall\, t \in]-\infty; 0] : l(t) = e^{t}\, a + (1 - e^{t})\, b$$

6)

a) Rappelons, pour une fonction affine qui serait définie sur : $[a; b]$:

$$m(x) = m(a) + \frac{m(b) - m(a)}{b - a}(x - a)$$

La fonction répondant au problème est alors :

$$m(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{b - a}(x - a)$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{(b-a)}(x - a)$$

$$= \pi\left(-\frac{1}{2} + \frac{x-a}{b-a}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{-1\,(b-a)}{2\,(b-a)} + \frac{2\,(x-a)}{b-a}\right)$$

$$\frac{\pi\,(2\,x - a - b)}{2\,(b-a)}$$

Finalement, en faisant apparaitre le milieu du segment $[a; b]$:

$$m(x) = \frac{\pi\,\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{b - a}$$

b) Une fonction répondant à la question est définie par :

$$\forall\, x \in [a; b[: n(x) = tan^{-1}(m(x)) = tan^{-1}\left(\frac{\pi\,\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{b-a}\right)$$