Devoir Maison de Mathématiques AI1 – 1er semestre 2017/2018

Enseignant : Laurent Gry

Exercice 1 (8 points): Primitive de puissances de sinus

1) Déterminer une primitive de la fonction $f(x) = sin^{\,3}(x)$. On pourra poser $u(x) = cos\,(x)$
2) Vérifier qu'en posant $u(x) = cos\,(x)$ on ne peut aboutir à la détermination d'une primitive de $f(x) = sin^{\,4}(x)$. On se propose donc de trouver une autre méthode.

a) Exprimer $sin^{\,2}(x)$ en fonction de $cos(2\,x)$
b) En déduire une expression développée de $sin^{\,4}(x)$ en fonction de $cos(2\,x)$
c) Exprimer $cos^2(2\,x)$ en fonction de $cos(4\,x)$
d) En déduire une expression développée de $sin^{\,4}(x)$ en fonction de $cos(2\,x)$ et $cos(4\,x)$
e) Déterminer alors une primitive de $sin^{\,4}(x)$
f) S'inspirer de ce qui a été fait précédemment pour déterminer une primitive de la fonction $f(x) = sin^{\,6}(x)$

Exercice 2 (5 points): Linéarisation de fonctions trigonométriques

1) Montrer que l'on a pour tout couple de réels (a, b) :

$$cos(a)\ cos(b) = \frac{1}{2}\left(cos(a+b)\ +\ cos(a-b)\right)$$

2) En déduire des formules analogues pour $sin(a)\ \ sin(b)$ et $sin(a)\ \ cos(b)$
3) Application : linéariser la fonction $f(x) = \sin(x)\cos\,(3\,x)$ et en déduire une primitive

Exercice 3 (7 points): Dérivées successives des fonctions trigonométriques

Soit les fonctions $f(x) = sin(x)$ et $g(x) = cos(x)$

1) Montrer que

$$f'(x) = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad g'(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

2) En déduire les expressions des dérivées d'ordre n $f^{(n)}(x)$ et $g^{(n)}(x)$ de f et g
3) En particulier, déterminer $f^{(n)}(0)$ et $g^{(n)}(0)$
4) Montrer que l'on a sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq f(x) \leq x$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} \leq g(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

On pourra étudier le signe de fonctions différence.

5) On admet (pour les cracks le démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$) que l'on a sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots . - \frac{x^{4\,n+3}}{(4\,n+3)!} \leq f(x) \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots . - \frac{x^{4\,n+3}}{(4\,n+3)!} + \frac{x^{4\,n+5}}{(4\,n+5)!}$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots . - \frac{x^{4\,n+2}}{(4\,n+2)!} \leq g(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots . - \frac{x^{4\,n+2}}{(4\,n+2)!} + \frac{x^{4\,n+4}}{(4\,n+4)!}$$

Déterminer à la calculette la plus petite valeur de n telle que :

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4\,n+5}}{(4\,n+5)!} \leq 10^{-13}$$

puis celle pour laquelle on a :

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4\,n+4}}{(4\,n+4)!} \leq 10^{-13}$$

6) En déduire que les fonctions $sin(x)$ et $cos(x)$ peuvent se confondre sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ à 10^{-13} près avec des fonctions polynômiales qu'on explicitera

Corrigé

Exercice 1

1) On pose $u(x) = cos(x)$ donc $u'(x) = -sin(x)$ alors :

$$f(x) = sin^3(x) = sin^2(x)\ sin(x) = \left(1 - cos^2(x)\right) sin(x) = \left(1 - u^2(x)\right)\left(-u'(x)\right)$$

$$= (u^2(x) - 1)\ u'(x)$$

Donc une primitive est :

$$F(x) = \frac{1}{3}u^3(x) - u(x) = \frac{1}{3}cos^3(x) - cos(x)$$

2) $f(x) = sin^4(x) = \left(1 - cos^2(x)\right)^2$

En posant $u(x) = cos(x)$ on ne peut pas faire apparaitre $u'(x)$, il faut donc trouver une autre méthode.

a) Une formule de duplication donne :

$$cos(2x) = 1 - 2\ sin^2(x)$$

On en tire :

$$sin^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2}$$

b) On déduit du a) :

$$sin^4(x) = \left(\frac{1 - cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\ (1 - 2\ cos(2x) + cos^2(2x)\ )$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ cos(2x) + \frac{1}{4}\ cos^2(2x)$$

c) On a :

$$cos(4x) = 2\ cos^2(2x) - 1$$

d'où on tire :

$$cos^2(2x) = \frac{1 + cos(4x)}{2}$$

d) On déduit :

$$sin^4(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\, cos(2x) + \frac{1}{4}\left(\frac{1 + cos(4x)}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\, cos(2x) + \frac{1}{8}\, cos(4x)$$

e) Une primitive est donc :

$$F(x) = \frac{3}{8}\, x - \frac{1}{4}\, sin(2x) + \frac{1}{32}\, sin(4x)$$

f) On a :

$$sin^6(x) = \left(sin^2(x)\right)^3 = \left(\frac{1 - cos(2x)}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 - 3\, cos(2x) + 3\, cos^2(2x) - cos^3(2x)\right)$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\, cos(2x) + \frac{3}{8}\left(\frac{1 + cos(4x)}{2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1 + cos(4x)}{2}\right) cos(2x)$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\, cos(2x) + \frac{3}{16} + \frac{3}{16}\, cos(4x) - \frac{1}{16}\, cos(2x) - \frac{1}{16}\, cos(4x)\, cos(2x)$$

$$= \frac{5}{16} - \frac{7}{16}\, cos(2x) + \frac{3}{16}\, cos(4x) - \frac{1}{16} \times \frac{1}{2}\left(cos(6x) + cos(2x)\right)$$

$$= \frac{5}{16} - \frac{7}{16}\, cos(2x) + \frac{3}{16}\, cos(4x) - \frac{1}{32}\, cos(6x) - \frac{1}{32}\, cos(2x)$$

$$= \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\, cos(2x) + \frac{3}{16}\, cos(4x) - \frac{1}{32}\, cos(6x)$$

Un primitive est alors :

$$F(x) = \frac{5}{16} x - \frac{15}{64}\, sin(2x) + \frac{3}{64}\, sin(4x) - \frac{1}{192}\, sin(6x)$$

Exercice 2 :

1) Les formules de duplication donnent :

$$cos(a + b) = cos(a)\, cos(b) - sin(a)\, sin(b)$$

$$cos(a - b) = cos(a)\, cos(b) + sin(a)\, sin(b)$$

Par addition, il vient :

$$cos(a + b) + cos(a - b) = 2\, cos(a)\, cos(b)$$

D'où :

$$\boxed{cos(a)\,cos(b) = \frac{1}{2}\,\big(cos(a+b) + cos(a-b)\big)}$$

2) On déduit par différence :

$$\boxed{sin(a)\,sin(b) = \frac{1}{2}\,\big(cos(a-b) - cos(a+b)\big)}$$

Puis on utilise les formules de duplication du sinus :

$$sin(a+b) = sin(a)\,cos(b) + cos(a)\,sin(b)$$

$$sin(a-b) = sin(a)\,cos(b) - cos(a)\,sin(b)$$

Par addition, il vient :

$$sin(a+b) + sin(a-b) = 2\,sin(a)\,cos(b)$$

D'où :

$$\boxed{sin(a)\,cos(b) = \frac{1}{2}\,\big(sin(a+b) + sin(a-b)\big)}$$

3) Application :

$$f(x) = sin(x)\,cos(3x) = \frac{1}{2}\,\big(sin(4x) + sin(-2x)\big) = \frac{1}{2}\,sin(4x) - \frac{1}{2}\,sin(2x)$$

Une primitive est :

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{8}\,cos(4x) + \frac{1}{4}\,cos(2x)}$$

Exercice 3

1) On a :

$$f'(x) = cos(x) = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$g'(x) = -sin(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

2) On en déduit pour tout entier naturel n :

$$f^{(n)}(x) = sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$g^{(n)}(x) = cos\left(x + n\ \frac{\pi}{2}\right)$$

3) En particulier :

$$f^{(n)}(0) = sin\left(n\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$$g^{(n)}(0) = cos\left(n\ \frac{\pi}{2}\right)$$

Un cercle trigonométrique nous invite à distinguer les cas où $n = 2\,p + 1$ est impair et $n = 2\,p$ est pair :

$$f^{(2p+1)}(0) = sin\left((2\,p + 1)\ \frac{\pi}{2}\right) = sin\left(\frac{\pi}{2} + p\,\pi\right) = (-1)^p$$

$$g^{(2p+1)}(0) = cos\left((2\,p + 1)\ \frac{\pi}{2}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} + p\,\pi\right) = 0$$

$$f^{(2p)}(0) = sin\left(2\,p\ \frac{\pi}{2}\right) = sin(\,p\,\pi) = 0$$

$$g^{(2p)}(0) = cos\left(2\,p\ \frac{\pi}{2}\right) = cos(\,p\,\pi) = (-1)^p$$

4) On pose :

$$h(x) = f(x) - x$$

$$k(x) = f(x) - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)$$

On dérive ces fonctions :

$$h'(x) = cos(x) - 1 \leq 0$$

$$k'(x) = cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$k''(x) = -sin(x) + x$$

h est donc décroissante sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et comme elle s'annule en 0 elle est donc négative ou nulle sur cet intervalle. On en déduit sur le même intervalle :

$$f(x) \leq x$$

Cela donne alors sur I :

$$k''(x) \geq 0$$

Donc $k'(x)$ est décroissante sur I et comme elle s'annule en 0, elle est donc positive ou nulle sur cet intervalle. On en déduit sur le même I que k est croissante et comme elle s'annule en 0 , on a sur I

$$k(x) \geq 0$$

Cela prouve sur I l'encadrement :

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq f(x) \leq x$$

et également :

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq g(x)$$

Pour l'autre majoration, posons :

$$m(x) = g(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)$$

et dérivons là :

$$m'(x) = -f(x) + x - \frac{x^3}{3!} \leq 0$$

Donc m est décroissante sur I et comme elle s'annule en 0, elle est donc négative ou nulle sur cet intervalle. D'où :

$$g(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

5) Procédons par récurrence en commençant par l'initialisation pour $n = 0$

Pour $g(x)$ c'est déjà fait. Pour $f(x)$ on introduit la fonction :

$$l(x) = f(x) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)$$

Et on la dérive :

$$l'(x) = g(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) \leq 0$$

Donc l est décroissante sur I et comme elle s'annule en 0, elle est donc négative ou nulle sur cet intervalle. D'où :

$$f(x) \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Passons à l'hérédité en supposant la propriété vraie pour un entier naturel n et montrons qu'elle est vraie pour l'entier $n+1$.

Posons :

$$p(x) = f(x) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots . - \frac{x^{4\,n+7}}{(4\,n+7)!}\right)$$

Alors :

$$p'(x) = g(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots . - \frac{x^{4\,n+6}}{(4\,n+6)!}\right)$$

$$p''(x) = -f(x) + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots . - \frac{x^{4\,n+3}}{(4\,n+3)!} + \frac{x^{4\,n+5}}{(4\,n+5)!} \geq 0$$

On en déduit que p' est croissante sur I et comme elle s'annule en 0, elle est donc positive ou nulle sur cet intervalle. Donc p est croissante sur I et comme elle s'annule en 0, elle est donc positive ou nulle sur I. Ainsi

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots . - \frac{x^{4\,n+7}}{(4\,n+7)!} \leq f(x)$$

On procède de façon analogue par étude de fonction pour les trois autres inégalités et on prouve l'hérédité.

6) La plus petite valeur de n dans les deux cas est 4
7) On en déduit :

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots . - \frac{x^{19}}{19!} \leq sin(x) \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots . - \frac{x^{19}}{19!} + \frac{x^{21}}{21!}$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots . - \frac{x^{18}}{18!} \leq cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots . - \frac{x^{18}}{18!} + \frac{x^{20}}{20!}$$

D'où les approximations sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ à moins de 10^{-13} :

$$sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots . - \frac{x^{19}}{19!}$$

$$cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots . - \frac{x^{18}}{18!}$$