Les distributions (Fichier en cours d'élaboration)

I Modélisation d'une impulsion :

Imaginons une masse pouvant glisser sans frottement le long d'un guide et sur laquelle on applique une force F sous forme d'un choc. Cette bille se trouve alors animée d'une vitesse initiale $v(0)$ acquise après un déplacement si court depuis la position d'origine, qu'il peut être considéré à notre échelle d'observation comme nul.

On peut se représenter la force par une fonction du temps, positive, nulle en dehors d'un intervalle du type $[-\tau, \tau\,]$ où τ est un réel strictement positif, strictement croissante sur $[-\tau, 0\,]$ et strictement décroissante sur $[0, \tau\,]$. Nous allons alors montrer, en utilisant les lois de la mécanique, que la vitesse $v(0)$ ne dépend pas de la forme employée pour décrire cette fonction mais uniquement de son intégrale sur $[-\tau, \tau\,]$, si τ est pris suffisamment petit.

La seconde loi de Newton s'écrit :

$$m\,\frac{dv}{dt} = F(t)$$

Intégrée entre les instants $-\tau$ et τ, cela donne : :

$$\int_{-\tau}^{\tau} m\,\frac{dv}{dt}\,dt = \int_{-\tau}^{\tau} F(t)\,dt$$

Soit :

$$m\,v(\tau) - m\,v(-\tau) = \int_{-\tau}^{\tau} F(t)\,dt$$

Finalement, considérant $v(-\tau) = 0$ et $v(\tau) \approx v(0)$ si τ est pris suffisamment petit :

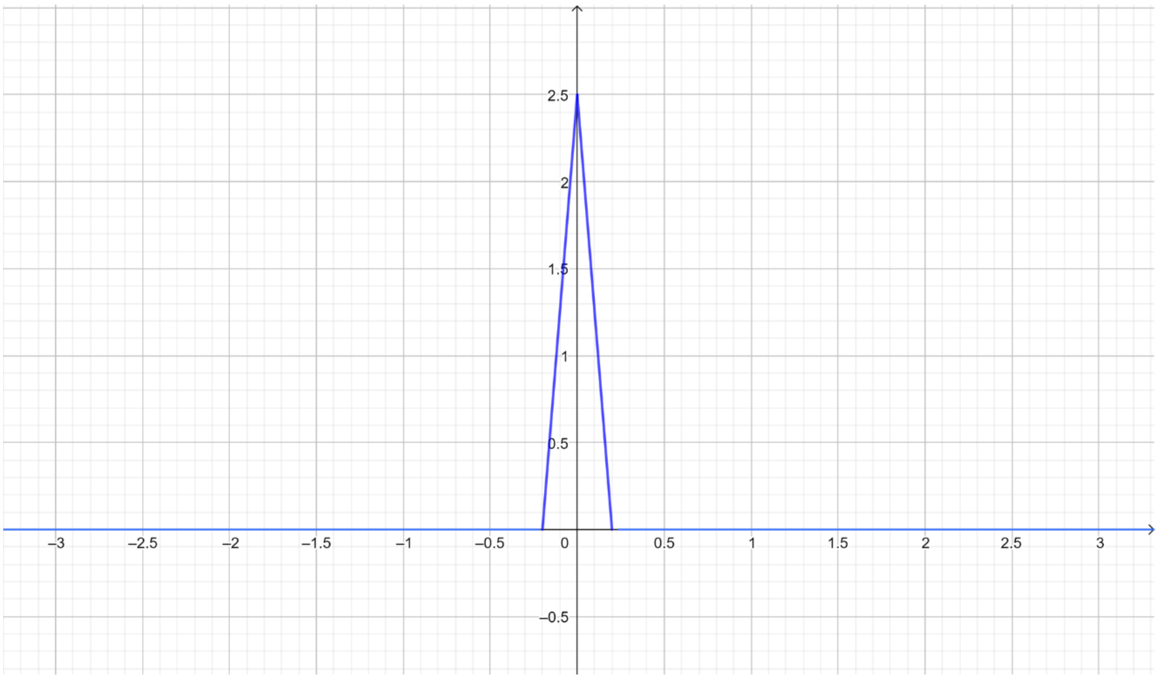
$$m\,v(0) = \int_{-\tau}^{\tau} F(t)\,dt$$

II Impulsion de Dirac

L'idée est de former une famille de fonctions aptes à représenter une impulsion telle que définie en I. Afin de simplifier la construction, on se contentera de construire une suite de fonctions pour lesquelles $\tau = \frac{1}{n}$, suite que l'on notera $\left(d_n(t)\right)_{n\,\in\,\mathbb{N}^*}$ (d en hommage à Dirac) et que nous allons prendre soin de définir, avec la condition :

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} F(t)\,dt = 1$$

1) Un premier exemple continu mais non dérivable sur $\mathbb{R}$



Courbe pour $n = 5$

L'allure en triangle de la courbe et la condition imposent la valeur en 0 en considérant :

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} d_n(t)\, dt = \frac{2}{n}\, d_n(0) = 1$$

Soit :

$$d_n(0) = \frac{n}{2}$$

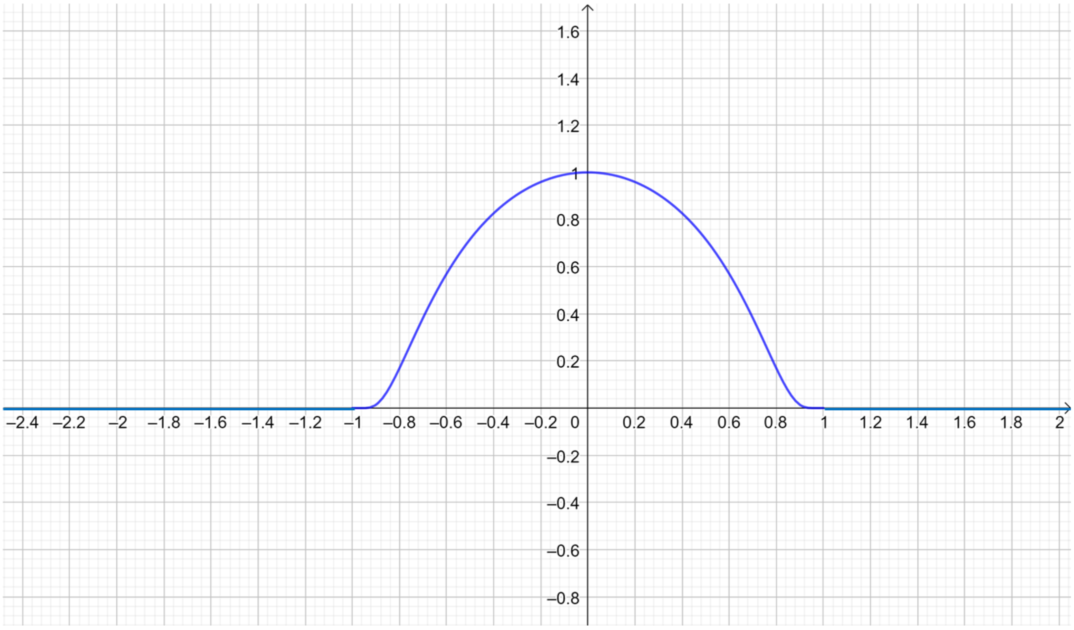
Ainsi, en utilisant, pour une fonction affine la formule $f(t) = m\,(t - a) + f(a)$, m étant le coefficient directeur de la droite, on obtient la définition analytique de la fonction :

$$d_n(t) = \frac{n^2}{2}\left(t + \frac{1}{n}\right) sur \left[-\frac{1}{n}, 0\right], -\frac{n^2}{2}\left(t - \frac{1}{n}\right) sur \left[-\frac{1}{n}, 0\right]$$

2) Un second exemple de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$

On commence par construire une fonction auxiliaire :

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{1-t^2}}\, sur\; [-1{,}1\,]\,, 0\; sinon$$



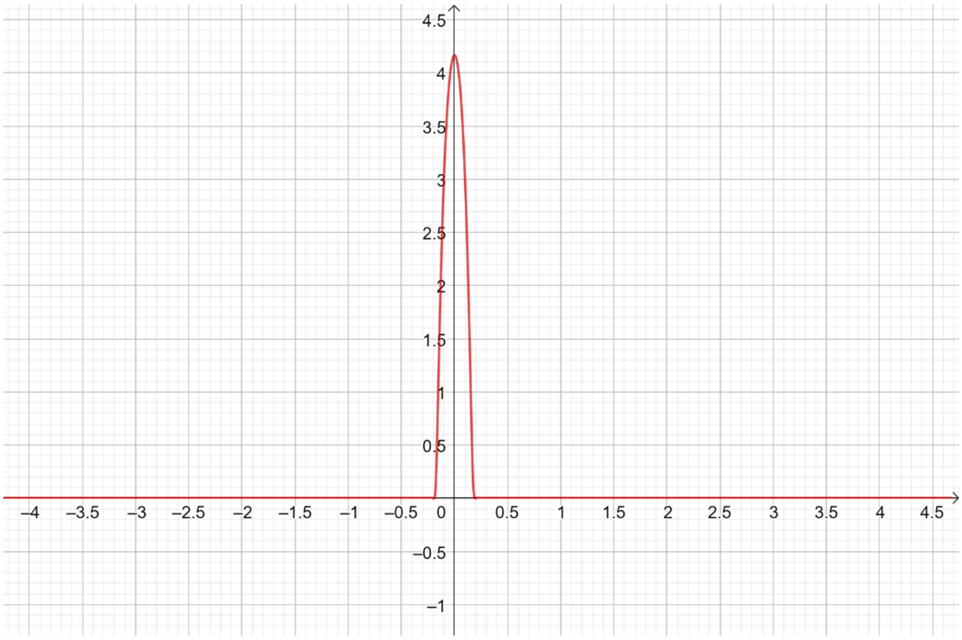
Puis on applique une contraction horizontale à la courbe de cette fonction :

$$g_n(t) = f(n\,t) = e^{-\frac{n^2\,t^2}{1-n^2\,t^2}}\ sur\ \left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right],0\ sinon$$

Courbe de $g_5(t)$

Enfin, on normalise la fonction par son intégrale sur $\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]$

$$d_n(t) = \frac{g_n(t)}{\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g_n(t)\,dt}\ sur\ \left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right],0\ sinon$$



Courbe de $d_5(t)$

Pour montrer que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que f l'est. Etudions donc la fonction f.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ par composition et sur $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$ où elle est nulle. Reste à étudier les dérivabilités successives en 1 compte tenu de la parité.

Considérons pour cela la propriété P_n définie par :

$$f \textit{ est de classe } \mathcal{C}^n \textit{ sur } [0,1\,] \textit{ et}$$

$$\forall\, t \in [0,1\,] : f^{(n)}(t) = \frac{Q_n(t)}{(1-t^2)^{2^n}} \ e^{-\frac{t^2}{1-t^2}}, \text{où } Q_n(t) \textit{ est une fonction polynomiale}$$

et montrons la par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$:

f est continue sur $[0,1\,[$ et :

$$\lim_{t\to 1^-} f(t) = \lim_{t\to 1^-} e^{-\frac{t^2}{1-t^2}} = 0 = f(1)$$

Donc f est continue à gauche en 1 et donc à droite et donc de classe $\mathcal{C}^0$ *sur* $[0,1\,]$

<u>Hérédité</u> : Supposons P_n vraie pour $n \in \mathbb{N}$ alors : $f^{(n)}$ dérivable sur $[0,1[$ et :

$$f^{(n)\prime}(t) = \frac{Q_n'(t)\,(1-t^2)^{2^n} + 2\,t \times 2^n\,(1-t^2)^{2^n-1}}{((1-t^2)^{2^n})^2} + \frac{Q_n(t)}{(1-t^2)^{2^n}}\left(\frac{-2\,t}{(1-t^2)^2}\right) e^{-\frac{t^2}{1-t^2}}$$

Soit, après mise au même dénominateur :

$$f^{(n+1)}(t) = \frac{Q_{n+1}(t)}{(1-t^2)^{2^{n+1}}}\ e^{-\frac{t^2}{1-t^2}}$$

$$\lim_{t\to1^-} f^{(n+1)}(t) = \lim_{t\to1^-} \frac{Q_{n+1}(1)}{(1-t^2)^{2^{n+1}}}\, e^{-\frac{t^2-1+1}{1-t^2}}$$

$$= \lim_{t\to1^-} \frac{Q_{n+1}(1)}{(1-t^2)^{2^{n+1}}}\, e\, e^{-\frac{1}{1-t^2}}$$

$$= \lim_{u\to+\infty} Q_{n+1}(1)\, e\, u^{2^{n+1}}\, e^{-u} = 0$$

$f^{(n)}$ est donc dérivable sur $[0,1[$, continue sur $[0,1\,]$ et a pour limite à gauche 0 en 1 donc est dérivable à gauche et son nombre dérivé à gauche est 0 tout comme son nombre dérivé à droite. Elle est donc dérivable en 1 et sa dérivée est continue à gauche et à droite en 1 donc f est classe $\mathcal{C}^{n+1}\ \ sur\ [0,1\,]$

III Concept de fonctionnelle ou de distribution

Considérons une fonction v intégrable en valeur absolue donc intégrable sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ (on dira localement absolument sommable sur $\mathbb{R}$ ou encore qu'elle appartient à l'espace vectoriel $L_1(\mathbb{R})$ formé par les fonctions ayant cette propriété). Alors, nous avons vu précédemment que, pour n suffisamment grand :

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} d_n(t)\, v(t)\, dt \ \approx v(0)$$

Soit, également :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d_n(t)\, v(t)\, dt \ \approx v(0)$$

Plus rigoureusement, on montre aisément que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d_n(t)\, v(t)\, dt = v(0)$$

D'où l'idée de créer un concept permettant de se passer du passage à la limite, qui est celui de fonctionnelle.

Pour cela, notons cette propriété, valable pour deux fonctions continues f et g sur $\mathbb{R}$, en désignant par $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ les fonctions continues nulles en dehors d'un intervalle fermé borné.

$$f = g \Leftrightarrow\ \forall\, v \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}) :\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, v(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, v(t)\, dt$$

Preuve :

Le sens direct est trivial. Pour le sens réciproque, commençons par montrer la propriété :

$$\forall\, v \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}) :\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, v(t)\, dt = 0 \Rightarrow\ f = 0$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Considérons les fonctions de la forme :

$$v(t) = d_n(t-a)$$

Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, d_n(t-a)\, dt = 0$$

Soit par changement de variable : $t - a = u$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-a)\, d_n(u)\, du = 0$$

et, en passant à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u+a)\, d_n(u)\, du = f(a) = 0$$

Donc f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

Partons alors de l'hypothèse :

$$\forall\, v \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, v(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, v(t)\, dt$$

On en déduit :

$$\forall\, v \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) - g(t))\, v(t)\, dt = 0$$

Donc $f - g$ est la fonction nulle et donc $f = g$

Les fonctions v sont appelées fonctions tests. Toutefois, afin de pouvoir bénéficier de propriétés avantageuses, dans le cas de fonctions f dérivables à plusieurs ordres, on est amené à considérer deux types d'espaces de fonctions tests :

<u>1er type</u> : Les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à support compact, l'ensemble de ces fonctions forme un espace vectoriel noté $\mathcal{D}$ et il contient les fonctions d_n.

<u>2ème type</u> : Les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à décroissance lente, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall\, (m,n) \in \mathbb{N}^2 \ \lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)\, x^m = \lim_{x\to-\infty} f^{(n)}(x)\, x^m = 0$$

Ces fonctions forment un espace vectoriel noté $\mathcal{S}$.

On définit alors, à partir d'une fonction f quelconque définie sur $\mathbb{R}$, une application linéaire appelée fonctionnelle ou distribution sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{S}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, notée T_f, par :

$$\forall\, v \in \mathcal{D}\ ou\ \mathcal{S} :\ T_f(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, v(t)\, dt$$

Il est à noter que lorsque f et v sont dans un même espace vectoriel, $T_f(v)$ n'est autre que le produit scalaire canonique de f et v. Pour cette raison, on le note :

$$T_f(v) = \langle f, v \rangle$$

Remarque :

Dans le cas où f et g sont continues sur $\mathbb{R}$:

$$T_f = T_g \Leftrightarrow f = g$$

Dans le cas où f et g sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$:

$$T_f = T_g \ \Leftrightarrow f = g \ sauf \ \acute{e}ventuellement \ aux \ points \ de \ discontinuit\acute{e}$$

Quand deux fonctions sont égales sauf en un nombre discret de points, on dit qu'elles sont égales presque partout.

De façon générale, on aura, pour deux fonctions f et g intégrables en valeur absolue sur $\mathbb{R}$:

$$T_f = T_g \ \Leftrightarrow f = g \ presque \ partout$$

IV Distributions (ou fonctionnelles)

On appelle distribution sur l'espace vectoriel des fonctions à support compact $\mathcal{D}$, l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}$. C'est un espace vectoriel noté $\mathcal{D}'$ et appelé espace dual de $\mathcal{D}$.

Exemple 1:

$$Pour \ f \in L_1(\mathbb{R}), v \ \in \ \mathcal{D} \ \ : \ T_f(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, v(t)\, dt$$

Dans cet exemple, la fonctionnelle T_f est associée à une fonction. On pourra, par abus d'écriture, noter T_f comme sa fonction f. Ainsi, on notera 1, la fonctionnelle associée à la fonction constante égale à 1.

On définit de manière analogue, l'espace vectoriel des distributions tempérées $\mathcal{S}'$ en considérant les formes linéaires continues sur $\mathcal{S}$.

Exemple 2 : la distribution de Dirac à l'origine notée δ_0 :

Elle est définie dans, par exemple, $\mathcal{D}'$ par :

$$\forall \ v \ \in \ \mathcal{D} \ \ : \ \delta_0(v) = v(0)$$

Exemple 3 : la distribution de Dirac en un point a réel quelconque :

Elle est définie dans $\mathcal{D}'$ par :

$$\forall \ v \ \in \ \mathcal{D} \ \ : \ \delta_a(v) = v(a)$$

Remarque : Afin de faire référence au fait qu'une distribution de Dirac peut être assimilée à une distribution associée à une fonction $t \to d_n(t-a)$ pour n suffisamment grand, on trouve comme notation pour δ_0, la notation de fonction $\delta(t)$ bien que ce ne soit pas une distribution associée à une fonction, et pour δ_a, la notation $\delta(t-a)$ qui traduit un retard a appliqué à la fonction $\delta(t)$.

V Opérations sur les distributions

1) Avance ou retard appliqué à une distribution

Rappels : Etant donnée une fonction f de la variable t, définie sur $\mathbb{R}$ et un réel strictement positif a, on définit les fonctions $\tau_a f$ et $\tau_{-a} f$ sur $\mathbb{R}$ par :

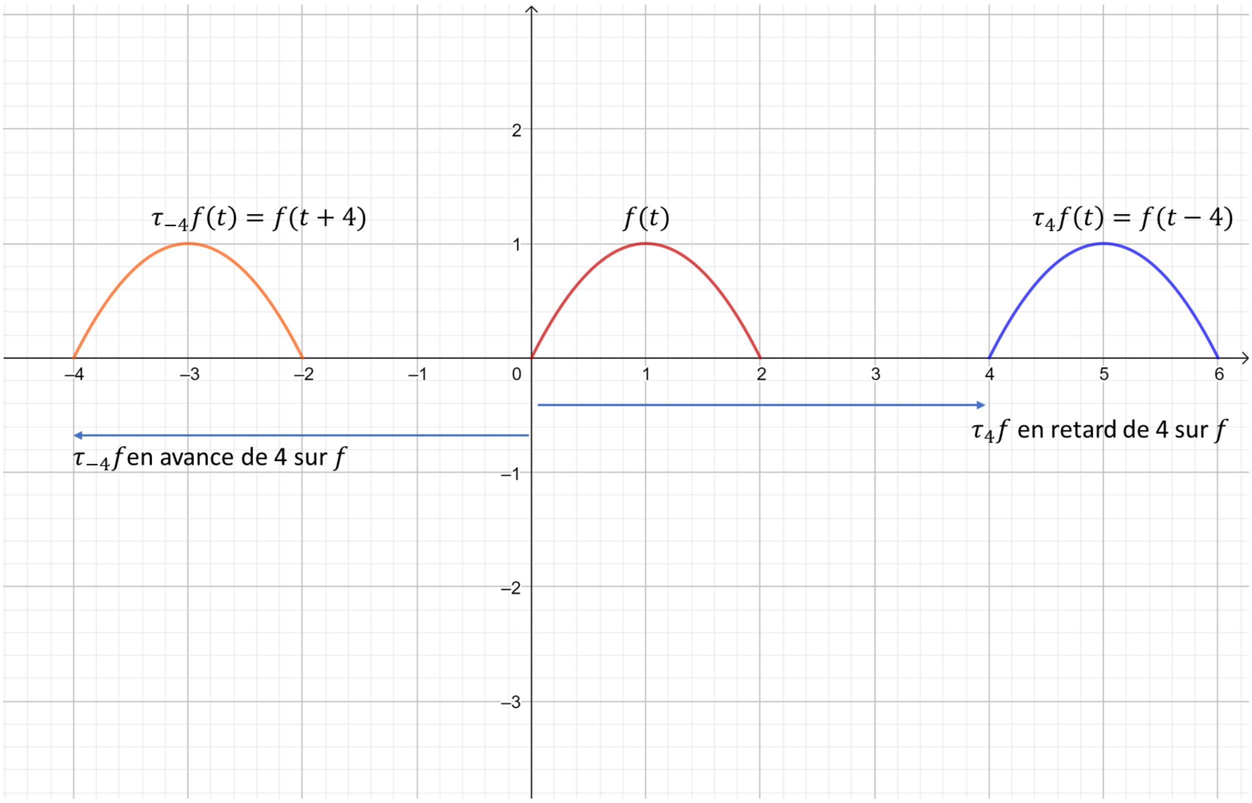
$$\tau_a f(t) = f(t-a)$$

$$\tau_{-a} f(t) = f(t+a)$$

La courbe de $\tau_a f$ s'obtient par une translation de la courbe de f de vecteur $a\,\vec{\imath}$, $\vec{\imath}$ étant le vecteur de base normé de l'axe des abscisses. Autrement dit, si la variable t est interprétée comme un temps, la fonction $\tau_a f$ reproduit la fonction f avec un retard de a.

La même interprétation se fait pour $\tau_{-a} f$ qui reproduit la fonction f mais avec une avance de a cette fois-ci.

Exemple graphique :



Voyons les conséquences en termes de fonctionnelles associées. Pour $v \in \mathcal{D}$ on a :

$$\langle \tau_a f, v\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_a f(t)\, v(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)\, v(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, v(u+a)\, dt = \langle f, \tau_{-a} v\rangle$$

De même :

$$\langle \tau_{-a} f, v\rangle = \langle f, \tau_a v\rangle$$

On définira alors de façon générale pour une distribution $\boldsymbol{T}$ de $\boldsymbol{\mathcal{D}'}$ ou $\boldsymbol{\mathcal{S}'}$, la distribution $\boldsymbol{\tau_a T}$ retardée ou avancée selon le signe de $\boldsymbol{a}$ appartenant à $\mathbb{R}$ cette fois-ci par :

$$\forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{D}} : \boldsymbol{\tau_a T(v) = T(\tau_{-a} v)}$$

<u>Exemple</u> : Distribution avancée ou retardée de la distribution de Dirac à l'origine

$$\forall\, v \in \mathcal{D} : \tau_a \delta(v) = \delta(\tau_{-a} v) = \tau_{-a} v(0) = v(a)$$

Cette distribution est souvent notée par abus avec une variable sous forme $\delta(t-a)$

2) <u>Produit de convolution de fonctions et de distributions</u>

Commençons par définir le produit de convolution $f * g$ de deux fonctions f et g intégrables en valeur absolue sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire dans l'espace vectoriel $L_1(\mathbb{R})$, par :

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(t-u)\, du$$

Un changement de variable montre que l'on a :

$$f * g = g * f$$

et que l'application $(f, g) \to f * g$ est bilinéaire.

Voyons les propriétés de ce produit de convolution en termes de fonctionnelle. Pour $v \in \mathcal{D}$ on a :

$$\langle f * g, v \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f * g(t)\;\; v(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(t-u)\, du \right)\; v(t)\, dt$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} f(u)\, g(t-u)\, v(t)\, du\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\, g(t-u)\, dt \right) f(u)\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, v(x+t)\, dx \right) du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, \tau_{-t} v(x)\, dx \right) du$$

$$= \langle f, w \rangle$$

Où w est la fonction définie par :

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, \tau_{-t} v(x)\, dx = \langle g, \tau_{-t} v \rangle$$

On définira alors tout naturellement le produit de convolution $\boldsymbol{T * S}$ de deux distributions $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{S}$ de $\boldsymbol{\mathcal{D}'}$ ou $\boldsymbol{\mathcal{S}'}$ par :

$$\forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{D}} : \boldsymbol{T * S(v) = T(w)} \;\boldsymbol{o}\text{ù}\;\; \boldsymbol{w(t) = S(\tau_{-t} v)}$$

Pourvu que la fonction $\boldsymbol{w}$ soit bien dans $\boldsymbol{\mathcal{D}}$.

Commutativité de la convolution pour des distributions régulières

Pour deux distributions T et S associées à des fonctions de $\mathcal{D}'$ ou $\mathcal{S}'$ on a :

$$\boldsymbol{T * S = S * T}$$

Propriétés de la distribution de Dirac vis-à-vis de la convolution :

Pour toute distribution T de $\mathcal{D}'$ ou $\mathcal{S}'$ on a :

$$\boldsymbol{T * \delta = \delta * T = T}$$

La distribution de Dirac à l'origine est donc élément neutre pour le produit de convolution.

Preuve : Pour $v \in \mathcal{D}$ on a :

$$T * \delta(v) = T(w)$$

Où :

$$w(t) = \delta(\tau_{-t}v) = \tau_{-t}v(0) = v(t)$$

Donc :

$$T * \delta(v) = T(v)$$

Ainsi :

$$T * \delta = T$$

De même :

$$\delta * T(v) = \delta(w) = w(0)$$

Où :

$$w(t) = T(\tau_{-t}v)$$

Donc :

$$\delta * T(v) = T(\tau_0 v) = T(v)$$

Ainsi :

$$\delta * T = T$$

3) Dérivée d'une distribution

Commençons par observer les propriétés d'une fonctionnelle associée à une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour $v \in \mathcal{D}$ on a :

$$\langle f', v\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\ v(t)\, dt = [f(t)v(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ v'(t) dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, v'(t)\, dt = \langle f, -v'\rangle$$

On définira alors de façon générale pour une distribution T de $\mathcal{D}'$ ou $\mathcal{S}'$, la distribution T' dérivée ou par :

$$\forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{D}} : \ \boldsymbol{T}'(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{T}(-\boldsymbol{v}') = -\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}')$$

Exemple 1 : Dérivée de la distribution de Dirac à l'origine

$$\forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{D}} : \ \boldsymbol{\delta}'(\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{v}') = -\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{0})$$

Exemple 2 : Dérivée de la distribution H associée à la fonction de Heaviside définie par :

$$h(t) = 1 \ sur \ [0, +\infty[, 0 \ sinon$$

$$\forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{D}} : \ H'(v) = -\langle h, v' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\ \ v'(t)dt = -\int_{0}^{+\infty} v'(t)dt = v(0) = \delta(v)$$

Donc :

$$\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{\delta}$$

La distribution de Dirac à l'origine est donc la dérivée de la distribution de Heaviside

Dérivation et convolution :

Pour deux distributions T et S de $\mathcal{D}'$ ou $\mathcal{S}'$ on a :

$$(\boldsymbol{T} * \boldsymbol{S})' = \boldsymbol{T} * \boldsymbol{S}' = \boldsymbol{T}' * \boldsymbol{S}$$

En particulier :

$$\boldsymbol{T}' = (\boldsymbol{T} * \boldsymbol{\delta})' = \boldsymbol{T} * \boldsymbol{\delta}'$$

Dériver une distribution revient donc à effectuer son produit de convolution avec la dérivée de la distribution de Dirac à l'origine.

Preuve :

Pour $v \in \mathcal{D}$ on a d'une part :

$$(T * S)'(v) = -T * S(v')$$
$$= -T(w)$$

Où :

$$w(t) = S(\tau_{-t} v')$$

Or :

$$g(x) = \tau_{-t} v'(x) = v'(x + t) = \big(v(x + t)\big)' = \big(\tau_{-t} v(x)\big)'$$

Donc :

$$\tau_{-t} v' = (\tau_{-t} v)'$$

D'où :

$$w(t) = -S'(\tau_{-t} v)$$

Et :

$$(T * S)'(v) = T\big(w_1(t)\big)$$

Où :

$$w_1(t) = S'(\tau_{-t}v)$$

Donc :

$$(T * S)'(v) = (T * S')(v)$$

Ainsi :

$$(T * S)' = T * S'$$

Pour la seconde :

$$(T' * S)(v) = T'(w) = -T(w')$$

Où :

$$w(t) = S(\tau_{-t}v)$$

Donc (utilisant la continuité de la forme linéaire S) :

$$w'(t) = S(\tau_{-t}v')$$

Ainsi :

$$(T' * S)(v) = -(T * S)(v') = (T * S)'(v)$$

3) Transformée de Fourier d'une distribution

Commençons, là encore, par regarder les propriétés de la transformée de Fourier de fonctions vis-à-vis des fonctionnelles qui leur sont associées en considérant, pour une fonction f de la variable t de $L_1(\mathbb{R})$ de transformée de Fourier Ff et une fonction ϕ de la variable ν de $L_1(\mathbb{R})$, de transformée de Fourier $F\phi$:

$$\langle Ff, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} Ff(\nu)\ \phi(\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2\,i\,\pi\,\nu\,t}\, dt \right) \phi(\nu) d\nu$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} f(t)\, \phi(\nu)\, e^{-2\,i\,\pi\,\nu\,t}\, dt\, d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\nu)\ \ e^{-2\,i\,\pi\,\nu\,t}\, d\nu \right) dt$$

$$\langle f, F\phi \rangle$$

On définira alors de façon générale pour une distribution T de $\mathcal{D}'$ ou $\mathcal{S}'$, la distribution FT transformée de Fourier de T d par :

$$\forall\, \boldsymbol{v}\ \in\ \boldsymbol{\mathcal{D}} :\ \boldsymbol{FT}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{v})$$

Exemple 1 : Transformée de Fourier de la distribution de Dirac à l'origine

$$\forall\, v\ \in\ \mathcal{D} :\ F\delta(v) = \delta(Fv) = Fv(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\, e^{-2\,i\,\pi\,0\,t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\, dt = \langle 1, v \rangle$$

Ainsi :

$$\boldsymbol{F\delta = 1}$$

La transformée de Fourier de la distribution de Dirac à l'origine est donc la distribution régulière associée à la fonction constante égale à 1