Calcul de distance à la surface de la Terre

1) **Objectif :**

On s'intéresse ici au calcul de la distance entre deux points de la Terre situés sur un même cercle parallèle en empruntant deux chemins différents, le premier étant un chemin situé sur le cercle parallèle et le second, un chemin situé sur le grand cercle reliant ces deux points

2) **Méthode :**

a) **Description de la situation**

Soit deux points A et B situés sur un même cercle parallèle et ayant pour coordonnées géographiques :

	Longitude (°)	Latitude (°)
Point A	β_A	α
Point B	β_B	α

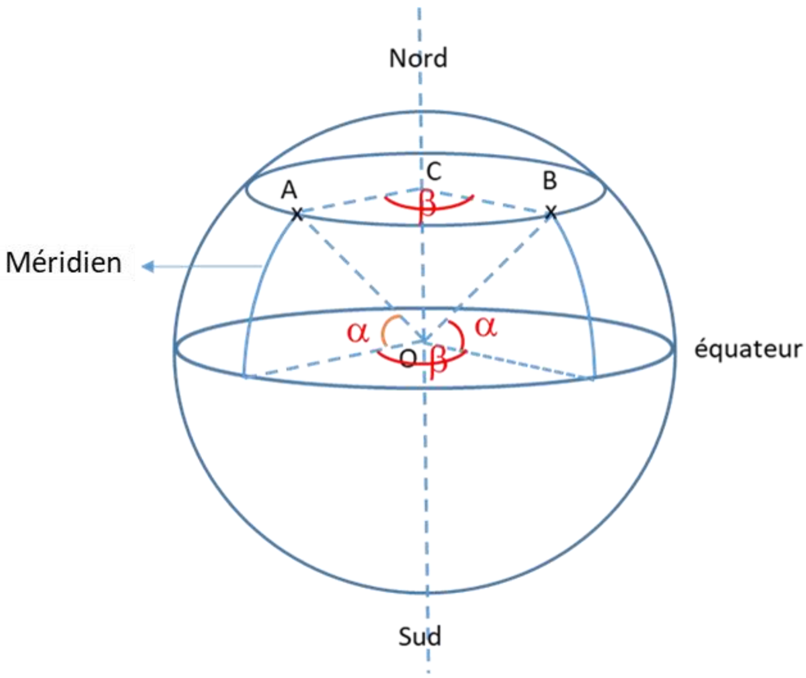
avec :

$$\beta_B > \beta_A$$

On note l'écart de longitude entre les deux points par :

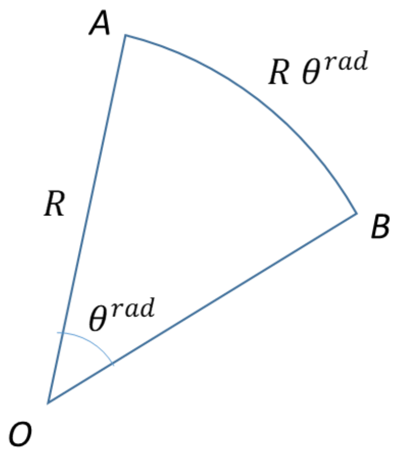
$$\beta = \beta_B - \beta_A$$

Les angles α et β sont figurés ci-dessous sur le globe terrestre :



b) Calculs géométriques généraux préliminaires

On considère un secteur angulaire $A\hat{O}B$ d'angle θ mesuré en degrés et de rayon $R = OA = OB$.



La mesure de l'arc joignant A à B est :

$$\boldsymbol{\widehat{AB} = R\ \theta^{rad}}$$

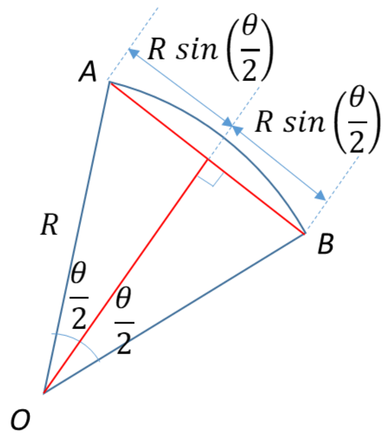
où θ^{rad} est la mesure en radian de l'angle $A\hat{O}B$ à savoir :

$$\boldsymbol{\theta^{rad} = \frac{\theta \times \pi}{180}}$$

La mesure de la corde joignant A à B est :

$$\boldsymbol{AB = 2\ R\ sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

comme le montre la figure ci-dessous en faisant apparaitre la hauteur du triangle OAB qui est isocèle de sommet O



c) Distance entre A à B en suivant le cercle parallèle

Il faut au préalable calculer le rayon CA du cercle parallèle en utilisant la propriété des angles alterne-interne qui donne :

$$C\hat{A}O = \alpha$$

On peut alors utiliser la formule du sinus dans le triangle CAO rectangle en C :

$$Cos(C\hat{A}O) = \frac{CA}{OA}$$

Soit, en notant R_T : le rayon de la Terre :

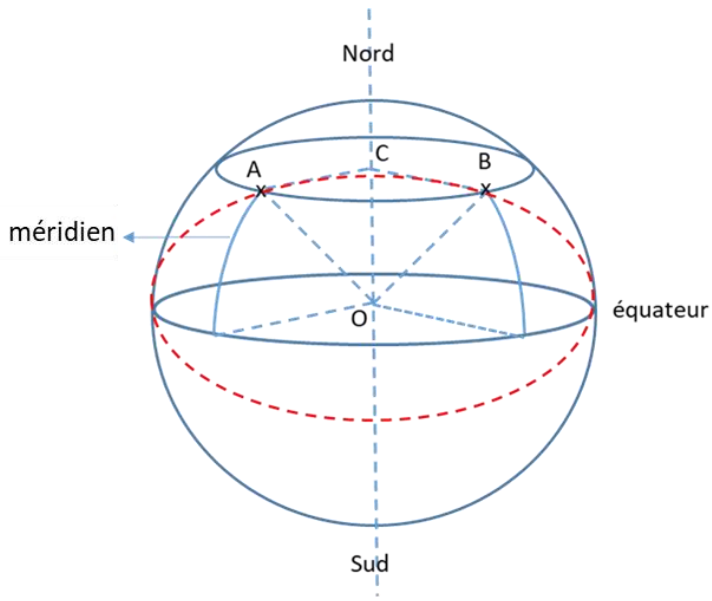
$$\boxed{\boldsymbol{CA = OA \times Cos(C\widehat{A}O) = R_T \cos(\alpha)}}$$

On en déduit la longueur de l'arc de cercle parallèle joignant A à B

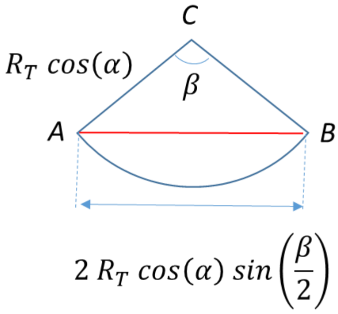
$$\boxed{\boldsymbol{\widehat{AB} = CA \times \beta^{rad} = \beta^{rad} R_T \cos(\alpha)}}$$

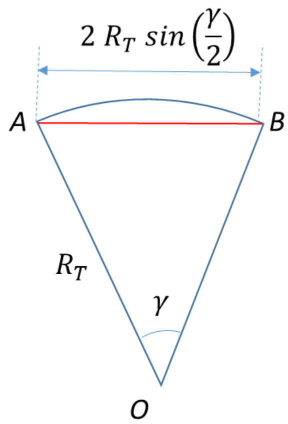
d) Distance entre A à B en suivant un grand cercle

Il faut au préalable déterminer l'angle formé par l'arc joignant A à B par un grand cercle à savoir l'angle $A\hat{O}B$ dont nous noterons γ la mesure en degrés.



Pour cela, notons que les secteurs $A\hat{C}B$ et $A\hat{O}B$ ont en commun la corde AB





Ainsi :

$$2\ R_T\ sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2\ R_T\ cos(\alpha)\ sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

Soit en simplifiant :

$$\boldsymbol{sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = cos(\alpha)\ sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

Cette relation permet d'obtenir γ qu'il faut ensuite convertir en radians pour obtenir l'arc de grand cercle :

$$\boldsymbol{\widehat{AB} = OA \times \gamma^{rad} = R_T\ \gamma^{rad}}$$

Pour les amoureux des belles formules mathématiques compactes, cela donne :

$$\boldsymbol{\widehat{AB} = 2\ R_T\ arcsin\left(cos(\alpha)\ sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)\frac{\gamma \times \pi}{180}}$$

3) **Exemple d'application** :

Les villes de Toronto et de Toulouse se situent chacune pratiquement sur le 43ème parallèle. Leurs coordonnées géographiques sont :

	Latitude (°)	Longitude (°)
Toronto	$43°\ 42'\ 00"\ N$	$79°\ 24'\ 58"\ O$
Toulouse	$43°\ 63'15"\ N$	$1°\ 26'37''E$

Notons A le centre de Toronto et B le centre de Toulouse. Pour simplifier, nous considérerons que ces deux points sont à la même latitude $\alpha = 43{,}5°$. L'écart de longitude entre ces deux points est alors :

$$\beta = 1° \, 26'37'' - (-79° \, 24' \, 58") = 80° \, 51' \, 35" = 80 + \frac{51}{60} + \frac{35}{3600} \; (°)$$

Le rayon de la Terre est :

$$R_T = 6371 \; km$$

On en déduit, la distance entre A et B en suivant le cercle parallèle c'est-à-dire en restant à la même latitude de 43,5° :

$$\boxed{\widehat{AB} = \beta^{rad} \, R_T \, cos(\alpha) = \left(80 + \frac{51}{60} + \frac{35}{3600}\right) \times \frac{\pi}{180} \times 6371 \times cos(43{,}5°) = 6521 \; km}$$

et, en suivant le grand cercle joignant A à B :

$$sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = cos(\alpha) \; sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = cos(43{,}5°) \; sin\left(\frac{80 + \frac{51}{60} + \frac{35}{3600}}{2}\right) \approx 0{,}47042$$

$$\gamma = 2 \; arcsin(0{,}47042) \approx 56{,}123°$$

$$\gamma^{rad} = \frac{56{,}123 \times \pi}{180} \approx 0{,}97953$$

$$\boxed{\widehat{AB} = 6371 \times 0{,}97953 \approx 6240 \; km}$$

On constate comme attendu que le trajet est plus court d'une centaine de kilomètres environ par le grand cercle que par le cercle parallèle.