Dipôle électrostatique

Le modèle de dipôle permet d'expliquer de nombreux phénomènes physiques, comme l'augmentation de la capacité électrique d'un condensateur par intégration d'un isolant polarisable appelé diélectrique entre les armatures, ou les interactions à courte distance entre constituants d'un fluide (forces de Van der Waals). Tous ces phénomènes proviennent de la délocalisation de charges au sein des molécules, phénomène appelé polarisation.

I **Le modèle du dipôle**

Considérons, dans l'espace, une distribution de n charges ponctuelles $(q_i)_{i=1 \text{ à } n}$ placées respectivement en n points $(A_i)_{i=1 \text{ à } n}$. Cette distribution définit un champ de potentiel en tout point de l'espace de la forme :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} k \frac{q_i}{A_i M}$$

avec :

$$k = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \ (S\,I)$$

Nous allons alors nous intéresser au champ lointain, c'est-à-dire, pour fixer les idées, à une distance grande devant la plus grande distance entre deux quelconques de ces charges. Pour cela, nous allons prendre un point de repère quelconque O situé au sein de cette distribution et poser :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u} \quad , \qquad r > 0\,, \qquad \|\vec{u}\| = 1$$

et pour tout i allant de 1 à N :

$$\overrightarrow{OA_i} = \vec{a}_i$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{A_iM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA_i} = r\,\vec{u} - \vec{a}_i$$

$$(A_iM)^2 = \|r\,\vec{u} - \vec{a}_i\|^2 = \|r\,\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{a}_i\,r + \|\vec{a}_i\|^2$$

$$A_iM = (r^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{a}_i\,r + \|\vec{a}_i\|^2)^{\frac{1}{2}} = r\left(1 - 2\,\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}_i}{r} + \frac{\|\vec{a}_i\|^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

D’où :

$$\frac{q_i}{A_iM} = \frac{q_i}{r}\left(1 - 2\,\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}_i}{r} + \frac{\|\vec{a}_i\|^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Soit, en négligeant le terme d’ordre 2 en $1/r$:

$$\frac{q_i}{A_iM} \approx \frac{q_i}{r}\left(1 - 2\,\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}_i}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Puis, en considérant le développant limité suivant en 0, au premier ordre :

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\,x$$

$$\frac{q_i}{A_iM} \approx \frac{q_i}{r}\left(1 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}_i}{r}\right)$$

D’où la forme approchée du champ lointain :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} k\,\frac{q_i}{r}\left(1 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}_i}{r}\right) = k\,\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{r} + k\,\frac{(\vec{u}\cdot\sum_{i=1}^{n} q_i\,\vec{a}_i)}{r^2}$$

Cette expression du potentiel se compose de deux termes. Dans le cas où la somme algébrique des charges de la distribution n’est pas nulle, seul le premier terme est prépondérant et le potentiel équivaut à celui d’une charge ponctuelle placée en O :

$$V(M) = k\,\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{r}$$

Dans le cas où la somme algébrique des charges est nulle, c’est le second terme qui définit le potentiel :

$$V(M) = k\,\frac{(\vec{u}\cdot\sum_{i=1}^{n} q_i\,\vec{a}_i)}{r^2}$$

C’est ce cas qui va nous intéresser et conduire au modèle du dipôle.

Supposons que la numérotation des charges soit telle que les m premières soit strictement positives et les $n-m$ restantes strictement négatives. Posons alors :

$$q = \sum_{i=1}^{m} q_i$$

ce qui est la somme des charges positives. Nous avons alors :

$$\sum_{i=m+1}^{n} q_i = -q$$

ce qui est la somme des charges négatives.

Introduisons alors les barycentres respectifs P et N des charges positives et des charges négatives, c'est-à-dire les points tels que :

$$\sum_{i=1}^{m} q_i\, \vec{a}_i = q\, \overrightarrow{OP}$$

$$\sum_{i=m+1}^{n} q_i\, \vec{a}_i = -q\, \overrightarrow{ON}$$

alors, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\, \vec{a}_i = q\, \overrightarrow{OP} - q\, \overrightarrow{ON} = q\, \overrightarrow{NP}$$

Cette quantité est alors appelée moment dipolaire et nous la noterons :

$$\vec{p} = q\, \overrightarrow{NP}$$

Si ce moment dipolaire n'est pas nul, l'expression du potentiel devient :

$$\boxed{\boldsymbol{V(M) = k\, \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{r^2}}}$$

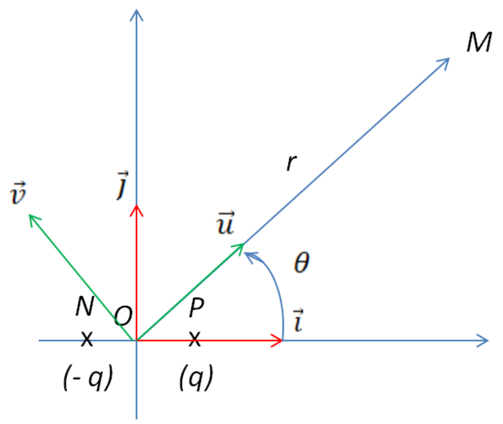
Ce potentiel est alors le même que celui créé par une charge q placée en P et $-q$ placée en N. On représente donc un dipôle par le schéma suivant, appelé image du dipôle :

$$\begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & P \\ (-\,q) & & (q) \end{array}$$

Le champ d'un dipôle est en $1/r^2$ et non plus en $1/r$ comme dans le cas où la somme algébrique des charges n'est pas nulle. C'est donc un champ qui agit à plus courte distance.

II Champ créé par un dipôle électrostatique

Considérons un dipôle électrostatique et définissons, dans un plan contenant N et P, un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ comme défini sur la figure, en prenant pour origine le milieu de N et de P



Un point M est alors repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) associées à ce repère. Ainsi :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u} = r\cos(\theta)\,\vec{\imath} + r\sin(\theta)\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{p} \cdot \vec{u} = p\,\vec{\imath} \cdot (\cos(\theta)\,\vec{\imath} + \sin(\theta)\,\vec{\jmath}) = p\cos(\theta)$$

d'où :

$$\boxed{\boldsymbol{V(M) = k\,\frac{p\cos(\theta)}{r^2}}}$$

Calculons alors, à partir de cette formule, les coordonnées du champ électrostatique associé, dans la base du repère local polaire $(M, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{v}$ est le vecteur unitaire orthogonal direct de $\vec{u}$, c'est-à-dire vérifiant :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$$

Nous allons au préalable établir les coordonnées du gradient dans la base polaire. Pour cela, commençons, dans un premier temps, par déplacer le point M de façon infinitésimale selon un rayon, passant ainsi des coordonnées (r, θ) à $(r + dr, \theta)$. Le travail du champ électrique est alors :

$$\vec{E}.\overrightarrow{dM} = -dV$$

Soit :

$$(E_r\,\vec{u} + E_\theta\,\vec{v}) \cdot dr\,\vec{u} = -\big(V(r+dr,\theta) - V(r,\theta)\big)$$

d'où :

$$E_r = -\frac{V(r+dr,\theta) - V(r,\theta)}{dr} = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Dans un deuxième temps, déplaçons le point M sur une portion infinitésimale d'arc de cercle de rayon r et d'angle $d\theta$. Nous avons :

$$(E_r\,\vec{u} + E_\theta\,\vec{v}) \cdot r\,d\theta\,\vec{v} = -\big(V(r,\theta+d\theta) - V(r,\theta)\big)$$

Soit :

$$E_\theta = -\frac{V(r,\theta+d\theta) - V(r,\theta)}{dr} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}$$

Finalement, nous avons les relations liant champ électrique et potentiel dans un plan :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\,\boldsymbol{V} = -\left(\frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial x}}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial y}}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}\right) = -\left(\frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial r}}\,\vec{\boldsymbol{u}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}\frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial\theta}}\,\vec{\boldsymbol{v}}\right)}$$

Procédons aux calculs dans le cas du dipôle :

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -2\,k\,\frac{p\,cos(\theta)}{r^3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} == -\,k\,\frac{p\,sin(\theta)}{r^3}$$

d'où le champ électrique :

$$\boxed{\vec{E} = k\,\frac{p}{r^3}\,\big(2\,cos(\theta)\,\vec{u}(\theta) + sin(\theta)\,\vec{v}(\theta)\big)}$$

On en déduit les caractéristiques :

$$\boxed{\left\|\vec{E}\right\| = k\,\frac{p}{r^3}\,\sqrt{3\,cos^2(\theta) + 1}}$$

Posant $\alpha = \big(\vec{u}, \vec{E}\big)$:

$$\boxed{Tan(\alpha) = \frac{sin(\theta)}{2\,cos(\theta)} = \frac{1}{2}\,Tan(\theta)}$$

Le champ peut être évalué en quelques points remarquables (positions de Gauss) à savoir pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$

$$\vec{E}(r,0) = 2\,k\,\frac{p}{r^3}\,\vec{\imath}$$

$$\vec{E}\left(r,\frac{\pi}{2}\right) = -\,k\,\frac{p}{r^3}\,\vec{\imath}$$

A noter, en désignant pas s la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle engendrée par $\vec{\imath}$,que :

$$\vec{E}(r,-\theta) = k\,\frac{p}{r^3}\,\big(2\,cos(\theta)\,\vec{u}(-\theta) - sin(\theta)\,\vec{v}(-\theta)\big)$$

$$= k\,\frac{p}{r^3}\,\Big(2\,cos(\theta) s\,\big(\vec{u}(\theta)\big) + sin(\theta)\,s\,\big(\vec{v}(\theta)\big)\Big)$$

$$= s\left(k\,\frac{p}{r^3}\big(2\,cos(\theta)\,\vec{u}(\theta) + sin(\theta)\,\vec{v}(\theta)\big)\right)$$

$$= s\left(\vec{E}(r,\theta)\right)$$

Les vecteurs $\vec{E}(r,-\theta)$ et $\vec{E}(r,\theta)$ sont donc symétrique par rapport à $\vec{\imath}$.

D'autre part :

$$\vec{E}(r,\theta+\pi) = k\,\frac{p}{r^3}\,\big(-2\,cos(\theta)\,\vec{u}(\theta+\pi) - sin(\theta)\,\vec{v}(\theta+\pi)\big)$$

$$= k\,\frac{p}{r^3}\big(2\,cos(\theta)\,\vec{u}(\theta) + sin(\theta)\,\vec{v}(\theta)\big)$$

$$= \vec{E}(r,\theta)$$

Les vecteurs $\vec{E}(\theta+\pi)$ et $\vec{E}(r,\theta)$ sont donc égaux.

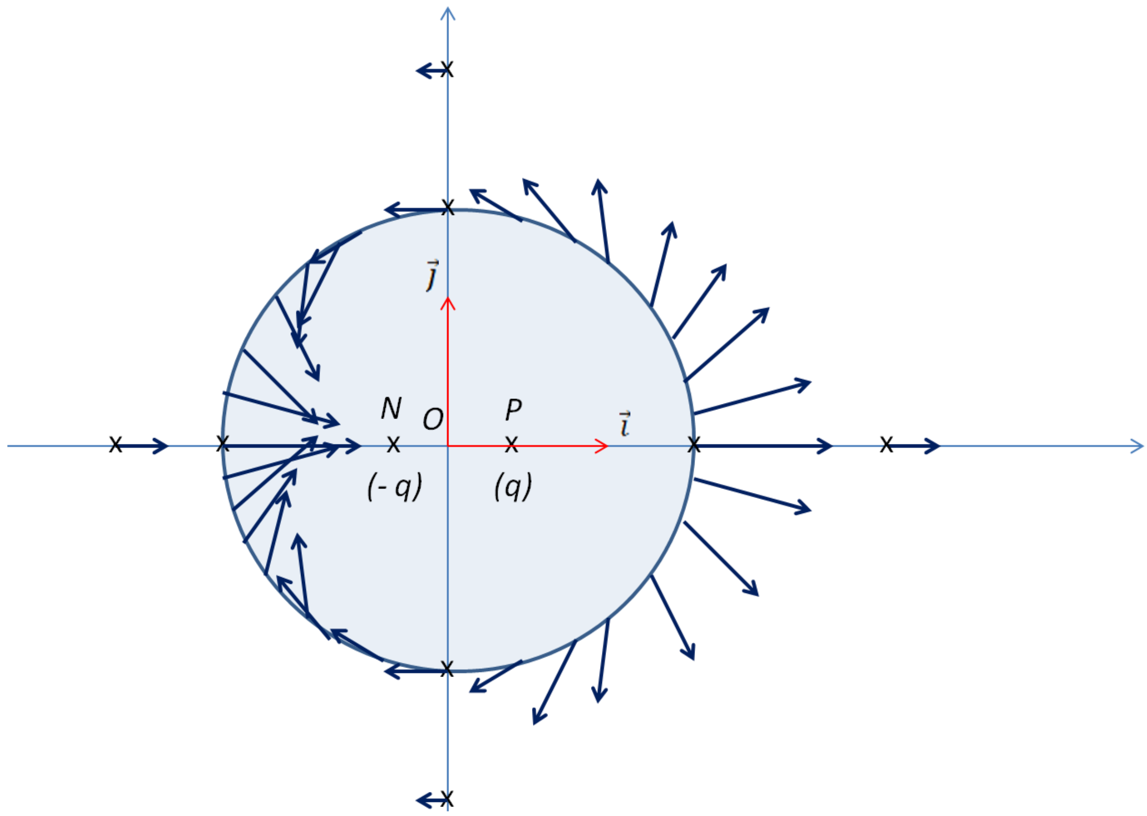
Voyons pour finir comment varie la norme du champ électrostatique sur le quart de cercle de rayon r pour θ variant de 0 à $\pi/2$.

$$\|\vec{E}\| = k\,\frac{p}{r^3}\,\sqrt{3\,cos^2(\theta) + 1}$$

Cette fonction décroît entre les deux valeurs :

$$\|\vec{E}\|(\theta = 0) = 2\,k\,\frac{p}{r^3} \quad , \qquad \|\vec{E}\|\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = \,k\,\frac{p}{r^3}$$

Nous pouvons donc donner l'allure du champ électrostatique, en le représentant plus particulièrement sur un cercle de rayon r



III Energie interne d'un dipôle électrostatique

Soit un dipôle que nous considérons assimilable à son image, à savoir une charge négative $-q$ placée en un point N et une charge positive q placée en un point P. Le but est de montrer que le travail des forces intérieures dérive d'un potentiel appelé énergie interne du dipôle.

Préliminaire mathématique :

Etant donné une fonction vectorielle variable $\vec{v}$, alors :

$$d\left(\frac{1}{\|\vec{v}\|}\right) = \frac{1}{\|\vec{v}+d\vec{v}\|} - \frac{1}{\|\vec{v}\|} = \frac{\|\vec{v}\| - \|\vec{v}+d\vec{v}\|}{\|\vec{v}+d\vec{v}\|\ \|\vec{v}\|}$$

$$= \frac{\|\vec{v}\| - \|\vec{v}+d\vec{v}\|}{\|\vec{v}+d\vec{v}\|\ \|\vec{v}\|} \times \frac{\|\vec{v}\| + \|\vec{v}+d\vec{v}\|}{\|\vec{v}\| + \|\vec{v}+d\vec{v}\|}$$

$$= \frac{\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v}+d\vec{v}\|^2}{\|\vec{v}+d\vec{v}\|\ \|\vec{v}\|\ (\|\vec{v}\| + \|\vec{v}+d\vec{v}\|)}$$

$$= \frac{\|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{v}\|^2 + 2\,\vec{v}\cdot d\vec{v} + \|d\vec{v}\|^2)}{\|\vec{v}+d\vec{v}\|\ \|\vec{v}\|\ (\|\vec{v}\| + \|\vec{v}+d\vec{v}\|)}$$

$$= \frac{-2\,\vec{v}\cdot d\vec{v} - \|d\vec{v}\|^2}{\|\vec{v}+d\vec{v}\|\,\|\vec{v}\|\,(\|\vec{v}\|+\|\vec{v}+d\vec{v}\|)}$$

Soit, en éliminant les termes négligeables :

$$= \frac{-2\,\vec{v}\cdot d\vec{v}}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{v}\|\,(\|\vec{v}\|+\|\vec{v}\|)}$$

Finalement :

$$\boxed{\boldsymbol{d}\left(\frac{\mathbf{1}}{\|\vec{\boldsymbol{v}}\|}\right) = -\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{v}}}{\|\vec{\boldsymbol{v}}\|^{\mathbf{3}}}}$$

Bien sûr, nous aurions pu adopter une approche plus « académiquement » satisfaisante en utilisant les résultats sur la différentiabilité des fonctions vectorielles (voir notre fichier à ce sujet) mais la bonté d'âme nous a poussé à développer une approche plus intuitive chère aux physiciens et permettant à ceux dont les mathématiques abstraites ne sont pas la tasse de thé de pouvoir néanmoins comprendre ce qu'elles recèlent par l'intuition.

Energie interne du dipôle :

Supposons donc que le dipôle se déplace de façon élémentaire de telle sorte que N ait un vecteur déplacement $\overrightarrow{dN}$ et P, un vecteur déplacement $\overrightarrow{dP}$.

La charge placée en P subit la force :

$$\vec{F} = -\frac{k\,q^2}{NP^3}\,\overrightarrow{NP}$$

et la charge placée en N subit la force opposée.

Ainsi le travail élémentaire de ces deux forces intérieures est :

$$\delta W^{int} = \vec{F}\cdot\overrightarrow{dP} - \vec{F}\cdot\overrightarrow{dN} = \vec{F}\cdot d\overrightarrow{NP} = -\frac{k\,q^2}{NP^3}\,\overrightarrow{NP}\cdot d\overrightarrow{NP} = -d\left(-\frac{k\,q^2}{NP}\right)$$

Or par définition d'un potentiel associé à un système de forces :

$$\delta W^{int} = -d(E_p)$$

On en déduit :

$$E_p = -\frac{k\,q^2}{NP} + cte$$

En prenant la constante nulle à l'infini (le choix est arbitraire puisque un potentiel n'a d'intérêt que par ses variations) :

$$\boxed{\boldsymbol{E_p = -\frac{k\, q^2}{NP}}}$$

Interprétation physique de cette énergie interne.

Imaginons une transformation infiniment lente (quasi statique selon une vue développée en thermodynamique) par laquelle les charges q et $-q$ passeraient d'une position d'infini éloignement à une position où q est en P et $-q$ en N. Au cours de cette transformation, les forces extérieures seraient à tout instant quasiment opposées aux forces intérieures et auraient de ce fait un travail égal à ces dernières. Le système des deux charges passant d'un positon statique à une autre position statique, n'aurait pas de variation d'énergie cinétique. Le théorème de l'énergie appliquée aux deux charges s'écrirait donc :

$$W^{ext} + W^{int} = 0$$

Soit :

$$W^{ext} = -W^{int} = \int_{état\ initial}^{état\ final} -\delta W^{int} = \int_{état\ initial}^{état\ final} d\left(E_p\right) = E_p(final) - E_p(initial)$$

Soit :

$$W^{ext} = -\frac{k\, q^2}{NP}$$

L'énergie interne du dipôle est donc l'énergie qu'il faut fournir pour constituer le dipôle partant de charges infiniment éloignées. A noter que cette énergie est négative, ce qui est logique puisqu'il faut s'opposer au travail de forces intérieures qui tendent à rapprocher les charges, donc appliquer un travail extérieur résistant.

IV Interaction d'un dipôle avec un champ électrostatique externe

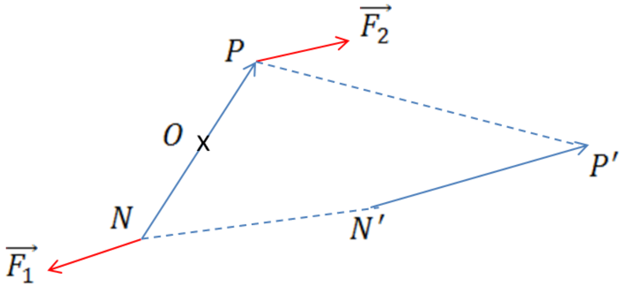
Soit un dipôle plongé dans un champ électrostatique $\vec{E}$ associé à un potentiel V. Nous allons évaluer les éléments de réduction du torseur des forces créés par le champ extérieur sur le dipôle au point O milieu de N et P, c'est-à-dire la résultante $\vec{F}$ de ces forces et leur vecteur moment en O $\vec{M}_0$.

Commençons par évaluer le travail des forces extérieures pour un déplacement infinitésimal du dipôle, ce dernier restant rigide (NP ne varie pas dans le déplacement).

Notons $\overrightarrow{F_1}$ la force exercée par le champ extérieur sur la charge $-q$ placée en N et $\overrightarrow{F_2}$ celle exercée sur la charge q placée en P.

Notons N' et P' les points tels que :

$$\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{dN} \quad , \quad \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{dP}$$



alors, le travail élémentaire des deux forces est :

$$\delta W^{ext} = \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dN} + \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{dP}$$

$$= -q\left(V(N) - V(N')\right) + q\left(V(P) - V(P')\right)$$

$$= q\left(-V(N) + V(N') + V(P) - V(P')\right)$$

$$= q\left(\left(V(N') - V(P')\right) - \left(V(N) - V(P)\right)\right)$$

$$\approx q\left(\vec{E}(N') \cdot \overrightarrow{N'P'} - \vec{E}(N) \cdot \overrightarrow{NP}\right)$$

$$q\,\overrightarrow{N'P'} \cdot \vec{E}(N') - q\,\overrightarrow{NP} \cdot \vec{E}(N)$$

$$= d\left(q\,\overrightarrow{NP} \cdot \vec{E}(N)\right)$$

$$\approx -d\left(-\vec{p} \cdot \vec{E}(O)\right)$$

le travail de ces forces dérive donc d'un potentiel qui est, en omettant pour alléger l'écriture, le point au centre du dipôle dans la notation :

$$\boxed{\boldsymbol{E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}}}$$

Attention, il s'agit d'une énergie potentielle associée au travail des forces extérieures, à ne pas confondre avec l'énergie interne, qui est un potentiel associé au travail des forces intérieures.

Nous allons alors imaginer deux types de transformations élémentaires, un premier déplaçant le dipôle en translation et un second en rotation de centre O.

<u>1ère transformation</u> : translation de vecteur $dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$

Le travail est d'une part :

$$\delta W^{ext} = F_{1x}\,dx + F_{1y}\,dy + F_{1z}\,dz + F_{2x}\,dx + F_{2y}\,dy + F_{2z}\,dz$$

$$= F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

d'autre part, $\vec{p}$ restant constant dans le déplacement :

$$\delta W^{ext} = d\left(\vec{p}\cdot\vec{E}(O)\right) = \vec{p}\cdot\overrightarrow{dE}(O) = \vec{p}\cdot\frac{\overrightarrow{\partial E}}{\partial x}(O)\,dx + \vec{p}\cdot\frac{\overrightarrow{\partial E}}{\partial y}(O)\,dy + \vec{p}\cdot\frac{\overrightarrow{\partial E}}{\partial z}(O)\,dz$$

Ainsi :

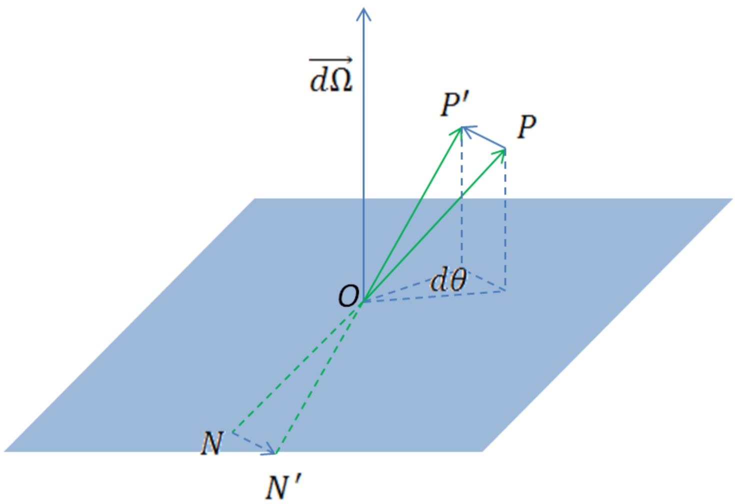
$$\boldsymbol{F_x = \vec{p}\cdot\frac{\overrightarrow{\partial E}}{\partial x}(O)}$$

$$\boldsymbol{F_y = \vec{p}\cdot\frac{\overrightarrow{\partial E}}{\partial y}(O)}$$

$$\boldsymbol{F_z = \vec{p}\cdot\frac{\overrightarrow{\partial E}}{\partial z}(O)}$$

<u>2ème transformation</u> : rotation selon un axe $(O,\vec{u})$ et d'angle $d\theta$

Notons $\overrightarrow{d\Omega} = d\theta\,\vec{u}$ le vecteur rotation élémentaire.



Un petit rappel de Maths avant de commencer :

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})}$$

Pour se souvenir comment permuter les lettres on peut utiliser ce moyen mnémotechnique, en dupliquant l'écriture des trois vecteurs

$$\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}\,\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}$$

et en isolant un triplet comme suit avec des parenthèses :

$$(\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w})\,\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}$$

$$\vec{u}\,(\vec{v}\,\vec{w}\,\vec{u})\,\vec{v}\,\vec{w}$$

$$\vec{u}\,\vec{v}\,(\vec{w}\,\vec{u}\,\vec{v})\,\vec{w}$$

Nous avons alors d'une part :

$$\delta W^{ext} = \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dN} + \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{dP} = \overrightarrow{F_1} \cdot \left(\overrightarrow{d\Omega} \wedge \overrightarrow{ON}\right) + \overrightarrow{F_2} \cdot \left(\overrightarrow{d\Omega} \wedge \overrightarrow{OP}\right)$$

$$= \overrightarrow{d\Omega} \cdot \left(\overrightarrow{ON} \wedge \overrightarrow{F_1}\right) + \overrightarrow{d\Omega} \cdot \left(\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F_2}\right) = \overrightarrow{d\Omega} \cdot \left(\overrightarrow{ON} \wedge \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F_2}\right)$$

$$= \overrightarrow{d\Omega} \cdot \vec{M}_0 = \vec{M}_0 \cdot \vec{u}\, d\theta$$

D'autre part, O restant fixe dans la rotation :

$$\delta W^{ext} = d\left(\vec{p} \cdot \vec{E}(O)\right) = d\vec{p} \cdot \vec{E}(O) = \left(\overrightarrow{d\Omega} \wedge \vec{p}\right) \cdot \vec{E}(O) = \left(\vec{p} \wedge \vec{E}(O)\right) \cdot \overrightarrow{d\Omega}$$

$$= \left(\vec{p} \wedge \vec{E}(O)\right) \cdot \vec{u}\, d\theta$$

En prenant tour à tour pour $\vec{u}$ les vecteurs de base du repère, on obtient :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{M}_0 = \vec{p} \wedge \vec{E}(O)}}$$

Ce résultat est conforme à l'intuition. Prenons en effet un dipôle plongé dans un champ constant $\vec{E}$ perpendiculaire à son axe, un couple de forces apparaît, qui fait pivoter le dipôle vers la position d'équilibre correspondant au vecteur $\overrightarrow{NP}$ colinéaire et de même sens que le vecteur $\vec{E}$.

Cela explique le phénomène d'augmentation de capacité d'un condensateur lorsqu'on place un diélectrique entre ses armatures à la place de l'air. Les constituants du diélectrique se polarisent et présentent des dipôles qui s'alignent sur le champ extérieur créé par les charges des armatures.