Différentiabilité

dans les espaces vectoriels normés généraux

I Définition générale

1) Différentiabilité en un point

Soit f une fonction d'un espace vectoriel normé $(\mathbb{E}, N)$ dans un espace vectoriel normé $(\mathbb{E}', N')$ et définie sur un domaine Ω qui est voisinage d'un vecteur A de $\mathbb{E}$.

On dit que f est différentiable en A s'il existe une application g de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}'$ linéaire et continue telle que l'on ait :

$$\forall\, X \in \Omega \;:\; f(X) = f(A) + g(X - A) + N'(X - A)\,\gamma(X)$$

$$\lim_{X \to A} \gamma(X) = 0$$

Une définition équivalente s'obtient en posant sur une boule ouverte $\mathbb{B}(A, \beta) \subset \Omega$

$$X = A + H$$

$$\forall\, H \in \mathbb{B}(0, \beta) \;:\; f(A + H) = f(A) + g(H) + N'(H)\,\gamma(H)$$

$$\lim_{H \to 0} \gamma(H) = 0$$

<u>Notation :</u>

L'application g ainsi définie est appelée application différentielle de f en A et est notée :

$$df(A)$$

et pour l'image d'un vecteur H :

$$g(H) = df(A).H$$

<u>Remarque :</u>

Une fonction différentiable en A est de façon évidente continue en A

2) Différentiabilité sur un ouvert et continue-différentiabilité

Soit f une fonction d'un espace vectoriel normé $(\mathbb{E}, N)$ dans un espace vectoriel normé $(\mathbb{E}', N')$ et définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{E}$.

On dit que f est différentiable sur Ω si elle différentiable en chacun de ses points. On peut alors définir l'application suivante :

$$df : \quad \Omega \to \mathcal{L}_c(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$$

$$A \to df(A)$$

On dit alors que f est continument différentiable ou de classe C_1 sur Ω si df est continue, $\mathcal{L}_c(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$ étant muni de sa norme habituelle :

$$\forall g \in \mathcal{L}_c(\mathbb{E}, \mathbb{E}') : \ |||g||| = sup \left\{ N'\big(g(X)\big) : \ N(X) = 1 \right\}$$

3) Cas particulier des fonctions vectorielles de la variable réelle

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$, muni de la norme définie par la valeur absolue, dans un espace vectoriel normé $(\mathbb{E}', N')$ et définie sur un domaine Ω qui est voisinage d'un réel a de Ω.

Alors f est différentiable en a si et seulement si il existe un vecteur B de $\mathbb{E}'$ telle que l'on ait :

$$\boxed{\begin{gathered} \forall\, x \in \Omega \ : \ f(x) = f(a) + (x-a)B + (x-a)\,\gamma(x) \\ \lim_{X \to a} \gamma(x) = 0 \end{gathered}}$$

ou de façon équivalente :

$$\boxed{\begin{gathered} \forall\, h \in]-\beta; \beta[\ : \ f(a+h) = f(a) + h\,B + h\,\gamma(h) \\ \lim_{h \to 0} \gamma(h) = 0 \end{gathered}}$$

On a alors :

$$\boxed{df(a).h = h\,B}$$

et :

$$\boxed{B = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

On adopte alors souvent la notation :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$$

En particulier, toutes les fonctions dérivables sur un intervalle $\boldsymbol{I}$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont différentiables sur ce même intervalle.

<u>Preuve</u> :

Supposons f différentiable en a alors sur un intervalle de la forme $]a-\beta; a+\beta[$ on a **:**

$$f(a+h) = f(a) + g(h) + h\,\gamma(h)$$

$$\lim_{h\to 0} \gamma(h) = 0$$

g étant linéaire :

$$g(h) = h\, g(1)$$

Posons :

$$B = g(1)$$

alors :

$$f(a+h) = f(a) + h\,B + h\,\gamma(h)$$

d'où pour $h \neq 0$:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = B + \gamma(h)$$

donc :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = B$$

<u>Réciproquement</u> :

Si

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = B$$

Alors on pose :

$$\gamma(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - B$$

et on en déduit :

$$f(a+h) = f(a) + h\,B + h\,\gamma(h)$$

$$\lim_{h\to 0} \gamma(h) = 0$$

On pose alors :

$$g(h) = h\,B$$

g est une application linéaire et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{E}'$ donc f est différentiable en a et $df(a) = g$

II <u>Linéarité de la différentiabilité :</u>

Soient f et g deux fonctions définies sur un même ouvert Ω d'un espace vectoriel normé $(\mathbb{E}, N)$ dans un espace vectoriel normé $(\mathbb{E}', N')$ et différentiables en $A \in \Omega$ et soit un réel λ alors :

$f + g$ est différentiable en a et : $d(f+g)(A) = df(A) + dg(A)$
$\lambda\, f$ est différentiable en a et : $d(\lambda\, f)(A) = \lambda\, df(A)$

Ainsi, en désignant par $\mathfrak{D}(A)$ l'ensemble des fonctions différentiables en A, l'application suivante Φ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels :

$$\boldsymbol{\Phi} : \quad \mathfrak{D}(\boldsymbol{A}) \to \boldsymbol{\mathcal{L}}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$$

$$\boldsymbol{f} \to \boldsymbol{df}(\boldsymbol{A})$$

<u>Preuve</u> :

<u>Somme</u> :

Sur une boule ouverte $\mathbb{B}(0, \beta)$ on a :

$$f(A+H) = f(A) + df(A).H + N'(H)\,\gamma_1(H)$$

$$g(A+H) = g(A) + dg(A).H + N'(H)\,\gamma_2(H)$$

$$\lim_{H\to 0} \gamma_1(H) = \lim_{H\to 0} \gamma_2(H) = 0$$

donc :

$$f(A+H)+g(A+H)=f(A)+g(A)+\big(df(A)+dg(A)\big).H+N'(H)\,\big(\gamma_1(H)+\gamma_2(H)\big)$$

Posons :

$$k(H)=\big(df(A)+dg(A)\big).H$$

$$\gamma(H)=\gamma_1(H)+\gamma_2(H)$$

alors :

$$(f+g)(A+H)=(f+g)(A)+k(H)+N'(H)\,\gamma(H)$$

avec :

$$\lim_{H\to 0}\gamma(H)=0$$

k linéaire

Donc $f+g$ est différentiable en A et : $d(f+g)(A)=k=df(A)+dg(A)$

<u>Produit par un réel</u> :

$$\lambda\, f(A+H)=\lambda\, f(A)+\big(\lambda\, df(A)\big).H+N'(H)\big(\lambda\,\gamma_1(H)\big)$$

Posons :

$$k(H)=\big(\lambda\, df(A)\big).H$$

$$\gamma(H)=\lambda\,\gamma_1(H)$$

alors :

$$(\lambda\, f)(A+H)=(\lambda\, f)(A)+k(H)+N'(H)\,\gamma(H)$$

avec :

$$\lim_{H\to 0}\gamma(H)=0$$

k linéaire

Donc $\lambda\, f$ est différentiable en A et : $d(\lambda\, f)(A)=k=\lambda\, df(A)$

4) Différentiabilité et composée

Soit g une fonction d'un espace vectoriel normé $(\mathbb{E}, \boldsymbol{N})$ dans un espace vectoriel normé $(\mathbb{E}', \boldsymbol{N}')$ et f une fonction de $(\mathbb{E}', \boldsymbol{N}')$ dans un espace vectoriel normé $(\mathbb{E}", \boldsymbol{N}")$.

Si g est différentiable en $A \in \mathbb{E}$ et f est différentiable en $g(A)$ alors $f \circ g$ est différentiable en A et :

$$\boldsymbol{d(f \circ g)(A) = df(g(A)) \circ dg(A)}$$

Preuve :

Il existe une boule ouverte $\mathbb{B}(0, \alpha)$ telle que :

$$\forall\, H \in \mathbb{B}(0, \alpha) \;:\; g(A + H) = g(A) + dg(A).H + N(H)\,\gamma_1(H)$$

$$\lim_{H \to 0} \gamma_1(H) = 0$$

Il existe une boule ouverte $\mathbb{B}(0, \beta)$ telle que :

$$\forall\, K \in \mathbb{B}(0, \beta) \;:\; f(g(A) + K) = f\big(g(A)\big) + df\big(g(A)\big).K + N'(K)\,\gamma_2(K)$$

$$\lim_{K \to 0} \gamma_2(K) = 0$$

Donc :

$$\forall\, H \in \mathbb{B}(0, \alpha) \;:\; f\big(g(A + H)\big) = f\big(g(A) + dg(A).H + N(H)\,\gamma_1(H)\big)$$

Posons :

$$K = dg(A).H + N(H)\,\gamma_1(H)$$

alors :

$$f\big(g(A + H)\big) = f\big(g(A)\big) + df\big(g(A)\big).\big(dg(A).H + N(H)\,\gamma_1(H)\big) + N'(K)\,\gamma_2(K)$$

Soit :

$$(f \circ g)(A + H) =$$

$$(f \circ g)(A) + \Big(df\big(g(A)\big) \circ dg(A)\Big).H + N(H)\;df\big(g(A)\big).\gamma_1(H) + N'(K)\,\gamma_2(K)$$

Or :

$$N'(K) \;\leq\; N'(dg(A).H) + N'\big(N(H)\,\gamma_1(H)\big) \leq \;|||dg(A)|||\; N(H) + N(H)\; N'\big(\gamma_1(H)\big)$$

Posons :

$$\gamma(H) = \frac{(f \circ g)(A+H) - (f \circ g)(A) - \Big(df\big(g(A)\big) \circ dg(A)\Big).H}{N(H)}$$

Alors :

$$N"\big(\gamma(H)\big) \leq \big|\big|\big|df\big(g(A)\big)\big|\big|\big|\; N'\big(\gamma_1(H)\big) + |||dg(A)|||\; N"\big(\gamma_2(K)\big) + \; N"\big(\gamma_2(K)\big)N'\big(\gamma_1(H)\big)$$

Or , la norme étant continue, quand H tend vers le vecteur nul, K tend vers le vecteur nul donc les fonctions $\gamma_1(H)$ et $\gamma_2(K)$ également et ainsi, la fonction majorante ci-dessus tend vers 0. On en déduit :

$$\lim_{H \to 0} \gamma(H) = 0$$

Donc :

$$(f \circ g)(A+H) = (f \circ g)(A) + \Big(df\big(g(A)\big) \circ dg(A)\Big).H + N(H)\,\gamma(H)$$

D'où $f \circ g$ différentiable en A et : $d(f \circ g)(A) = df\big(g(A)\big) \circ dg(A)$

III <u>Différentiabilité et réciproque</u>

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction définie sur un ouvert $\boldsymbol{\Omega}$ d'un espace vectoriel normé $(\mathbb{E}, \boldsymbol{N})$ dans un espace vectoriel normé $(\mathbb{E}', \boldsymbol{N}')$ et telle que :

$$\boldsymbol{f} \textbf{ continue et bijective de } \boldsymbol{\Omega} \textbf{ dans un ouvert } \boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\Omega})$$

$$\boldsymbol{f^{-1}} \textbf{ continue sur } \boldsymbol{\Omega}'$$

$$\boldsymbol{f} \textbf{ différentiable en } \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\Omega}$$

$$\boldsymbol{df}(\boldsymbol{A}) \textbf{ isomorphisme de } \mathbb{E} \textbf{ dans } \mathbb{E}' \textbf{ et } \big(\boldsymbol{df}(\boldsymbol{A})\big)^{-1} \textbf{ continue sur } \mathbb{E}'$$

alors :

$\boldsymbol{f^{-1}}$ différentiable en $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$ et :

$$\boldsymbol{df^{-1}}(\boldsymbol{B}) = \big(\boldsymbol{df}(\boldsymbol{A})\big)^{-1}$$

<u>Preuve</u> :

Soit $K \in \mathbb{E}'\backslash\{0\}$ tel que $B + K \in \Omega'$ posons :

$$\gamma(K) = \frac{1}{N'(K)}\left(f^{-1}(B+K) - f^{-1}(B) - \left(df(A)\right)^{-1}.K\right)$$

Posons également :

$$H(K) = f^{-1}(B+K) - f^{-1}(B)$$

ainsi (en omettant la variable K pour alléger l'écriture) :

$$f^{-1}(B+K) = A + H$$

donc :

$$B + K = f(A+H)$$

soit :

$$K = f(A+H) - f(A)$$

alors :

$$\gamma(K) = \frac{1}{N'(K)}\left(H - \left(df(A)\right)^{-1}.K\right)$$

Or, par différentiabilité de f en A, il existe une fonction β telle que :

$$f(A+H) - f(A) = df(A).H + N(H)\,\beta(H)$$

avec :

$$\lim_{H\to 0} \beta(H) = 0$$

donc :

$$K = df(A).H + N(H)\,\beta(H)$$

$$\left(df(A)\right)^{-1}.K = H + \left(df(A)\right)^{-1}.\left(N(H)\,\beta(H)\right)$$

et :

$$\gamma(K) = -\frac{N(H)}{N'(K)}\left(df(A)\right)^{-1}.\left(\,\beta(H)\right)$$

Donc :

$$N'\left(\gamma(K)\right) \leq \frac{N(H)}{N'(K)} \left|\left|\left|\left(df(A)\right)^{-1}\right|\right|\right|\ N'\left(\,\beta(H)\right)$$

Or :

$$N(H) - N\left(\left(df(A)\right)^{-1}.K\right) \leq N\left(H - \left(df(A)\right)^{-1}.K\right) = N(H)\, N\left(\left(df(A)\right)^{-1}.\left(\,\beta(H)\right)\right)$$

donc :

$$N(H) - N\left(\left(df(A)\right)^{-1}.K\right) \leq N(H)\ \left\|\left|\left(df(A)\right)^{-1}\right|\right\|\ N'\left(\,\beta(H)\right)$$

soit :

$$N(H)\ \left(1 - \left\|\left|\left(df(A)\right)^{-1}\right|\right\|\ N'\left(\,\beta(H)\right)\right) \leq N\left(\left(df(A)\right)^{-1}.K\right) \leq \left\|\left|\left(df(A)\right)^{-1}\right|\right\|\ N'(\,K)$$

Posons alors :

$$\varphi(K) = 1 - \left\|\left|\left(df(A)\right)^{-1}\right|\right\|\ N'\left(\,\beta\big(H(K)\big)\right)$$

Nous avons , par continuité de f en A :

$$\lim_{K \to 0} H(K) = 0$$

On en déduit par composition et différence :

$$\lim_{K \to 0} \varphi(K) = 1$$

donc :

$$\exists\ \alpha > 0 : B(A, \alpha) \subset \Omega \quad \text{et} \quad \forall\ K \in B(0, \alpha) : \ \varphi(K) \geq \frac{1}{2}$$

On a alors, pour $K \in B(0, \alpha)$:

$$\frac{1}{2} N(H) \leq \left\|\left|\left(df(A)\right)^{-1}\right|\right\|\ N'(\,K)$$

donc, pour $K \in B(0, \alpha) \backslash \{0\}$:

$$N'\big(\gamma(K)\big) \leq \frac{1}{2} \left\|\left|\left(df(A)\right)^{-1}\right|\right\|^{2}\ N'\left(\,\beta\big(H(K)\big)\right)$$

La quantité majorante tendant vers 0 quand K tend vers le vecteur nul, il en résulte :

$$\lim_{K \to 0} \gamma(K) = 0$$

donc f^{-1} différentiable en B et :

$$df^{-1}(B) = \left(df(A)\right)^{-1}$$

IV Différentiabilité des applications bilinéaires continues

Soient $(\mathbb{E}, \boldsymbol{N})$,$(\mathbb{E}', \boldsymbol{N}')$,$(\mathbb{E}", \boldsymbol{N}")$ trois espaces vectoriels normés et $\boldsymbol{f}$ une application bilinéaire continue de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}'$ dans $\mathbb{E}"$ alors $\boldsymbol{f}$ est différentiable en tout point de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}'$ muni de la norme usuelle N_∞ ou toute autre norme équivalente et :

$$\forall\ (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}' : \mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}).(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{K}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{K}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{B})$$

Plus généralement :

Soient $(\mathbb{E}_1, \boldsymbol{N}_1)$,$(\mathbb{E}_2, \boldsymbol{N}_2)$,... $(\mathbb{E}_p, \boldsymbol{N}_p)$, $(\mathbb{E}, \boldsymbol{N})$ $\boldsymbol{p}+\mathbf{1}$ espaces vectoriels normés et $\boldsymbol{f}$ une application $\boldsymbol{p}$-linéaire continue de $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \ldots \times \mathbb{E}_p$ dans $\mathbb{E}$ alors $\boldsymbol{f}$ est différentiable en tout point de $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \ldots \times \mathbb{E}_p$ muni de la norme usuelle N_∞ ou toute autre norme équivalente et :

$$\forall\ (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_p) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \ldots \times \mathbb{E}_p :$$

$$\mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_p).(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \ldots, \boldsymbol{H}_p) =$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_p) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{H}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_p) + \cdots + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{H}_p)$$

Un exemple d'application est le déterminant de p vecteurs dans une base d'un espace vectoriel normé $(\mathbb{E}, N)$ qui est une forme p-linéaire alternée de $\mathbb{E}^p$ dans $\mathbb{R}$.

Preuve :

Cas bilinéaire :

On a pour tous (A, B) et (H, K) de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}'$:

$$f(A+H, B+K) = f(A, B) + f(A, K) + f(H, B) + f(H, K)$$

Donc :

$$f(A+H, B+K) - f(A, B) - f(A, K) - f(H, B) = f(H, K)$$

$$N"\big(f(A+H, B+K) - f(A, B) - f(A, K) - f(H, B)\big) = N"\big(f(H, K)\big)$$

Soit, par continuité de f :

$$N"\big(f(A+H, B+K) - f(A, B) - f(A, K) - f(H, B)\big) \leq |||f|||\ N(H)\ N'(K)$$

et

$$N"\big(f(A+H, B+K) - f(A, B) - f(A, K) - f(H, B)\big) \leq |||f|||\ N_\infty(H, K)\ N_\infty(H, K)$$

d'où, en posant pour $(H,K) \neq (0,0)$:

$$\gamma(H,K) = \frac{f(A+H,B+K) - f(A,B) - f(A,K) - f(H,B)}{N_\infty(H,K)}$$

on a :

$$N"\big(\gamma(H,K)\big) \leq |||f|||\ N_\infty(H,K)$$

donc :

$$\lim_{(H,K)\to(0,0)} \gamma(H,K) = 0$$

Ainsi :

$$f(A+H,B+K) = f(A,B) + f(A,K) + f(H,B) + N_\infty(H,K)\ \gamma(H,K)$$

Et l'application :

$$g(H,K) = f(A,K) + f(H,B)$$

est une application linéaire de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}'$ dans $\mathbb{E}"$ qui est continue car :

$$N"\big(g(H,K)\big) \leq N"\big(f(A,K)\big) + N"\big(f(H,B)\big) \leq |||f|||\ N(A)\ N'(K) + |||f|||\ N(H)\ N'(B)$$

$$N"\big(g(H,K)\big) \leq 2|||f|||N_\infty(A,B)\ N_\infty(H,K)$$

Donc f est différentiable en (A,B) et sa différentielle est g

<u>Cas général</u> :

Par récurrence sur p.

Pour $p = 2$, la propriété a déjà été prouvée.

Supposons la vraie pour un entier $p \geq 2$ et montrons là pour l'entier $p+1$

$$f\big(A_1+H_1, A_2+H_2, \dots, A_p+H_p, A_{p+1}+H_{p+1}\big) =$$

$$f\big(A_1+H_1, A_2+H_2, \dots, A_p+H_p, A_{p+1}\big) + f\big(A_1+H_1, A_2+H_2, \dots, A_p+H_p, H_{p+1}\big)$$

Posons :

$$g\big(X_1, X_2, \dots, X_p\big) = f\big(X_1, X_2, \dots, X_p, A_{p+1}\big)$$

alors g est une application p-linéaire de $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \dots \times \mathbb{E}_p$ dans $\mathbb{E}$, donc par hypothèse de récurrence :

$$g(A_1+H_1,A_2+H_2,\dots,A_p+H_p) =$$

$$g(A_1,A_2,\dots,A_p)+g(H_1,A_2,\dots,A_p)+g(A_1,H_2,\dots,A_p)+\cdots+g(A_1,A_2,\dots,H_p)$$
$$+N_\infty(H_1,H_2,\dots,H_p)\,\gamma_1(H_1,H_2,\dots,H_p)$$

avec :

$$\lim_{(H_1,H_2,\dots,H_p)\to(0,0,\dots,0)} \gamma_1(H_1,H_2,\dots,H_p)=0$$

Voyons le second terme :

$$f(A_1+H_1,A_2+H_2,\dots,A_p+H_p,H_{p+1}) =$$

$$f(A_1,A_2,\dots,A_p,H_{p+1})+\sum_{(i_1,i_2,\dots,i_p)} f\left(C_{i_1},C_{i_2},\dots,C_{i_p},H_{p+1}\right)$$

où, dans la somme précédente, $C_{i_1}=A_1\ ou\ H_1$, $C_{i_2}=A_2\ ou\ H_2$,..., $C_{i_p}=A_p\ ou\ H_p$ et où il y a toujours au moins un terme H_k. Ainsi, il existe une constante réelle K telle que :

$$N\left(f(A_1+H_1,A_2+H_2,\dots,A_p+H_p,H_{p+1})-f(A_1,A_2,\dots,A_p,H_{p+1})\right)$$

$$\leq \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_p)} N\left(f\left(C_{i_1},C_{i_2},\dots,C_{i_p},H_{p+1}\right)\right)\leq |||f|||\ K\ {N_\infty}^2(H_1,H_2,\dots,H_p)$$

Posons :

$$\gamma(H_1,H_2,\dots,H_{p+1}) =$$

$$\frac{1}{N_\infty(H_1,H_2,\dots,H_{p+1})}\Big(f(A_1+H_1,A_2+H_2,\dots,A_p+H_p,A_{p+1}+H_{p+1})$$
$$-f(A_1,A_2,\dots,A_p,A_{p+1})-f(H_1,A_2,\dots,A_p,A_{p+1})-f(A_1,H_2,\dots,A_p,A_{p+1})$$
$$-\cdots-f(A_1,A_2,\dots,A_p,H_{p+1})\Big)$$

alors :

$$N\left(\gamma(H_1,H_2,\dots,H_{p+1})\right)$$

$$\leq \frac{N_\infty(H_1,H_2,\dots,H_p)}{N_\infty(H_1,H_2,\dots,H_{p+1})} N\left(\gamma_1(H_1,H_2,\dots,H_p)\right)+|||f|||\ K\ N_\infty(H_1,H_2,\dots,H_{p+1})$$

$$\leq N\left(\gamma_1(H_1,H_2,\dots,H_p)\right)+|||f|||\ K\ N_\infty(H_1,H_2,\dots,H_{p+1})$$

Le majorant étant une fonction qui a pour limite 0 quand $(H_1,H_2,\dots,H_{p+1})$ tend vers le vecteur nul, on en déduit :

$$\lim_{(H_1,H_2,\dots,H_{p+1})\to(0,0,\dots,0)} \gamma\left(H_1,H_2,\dots,H_{p+1}\right)=0$$

La différentiabilité de f ainsi que sa différentielle en $\left(A_1,A_2,\dots,A_p,A_{p+1}\right)$ s'en déduit et la propriété est démontrée au rang $(p+1)$

V Différentiabilité du produit scalaire et du produit vectoriel

Soient $(\mathbb{E},\boldsymbol{N})$ un espace vectoriel normé dont la norme est associée à un produit scalaire $\boldsymbol{f}$ alors $\boldsymbol{f}$ est différentiable en tout point de $\mathbb{E}\times\mathbb{E}$ muni de la norme usuelle N_∞ ou toute autre norme équivalente et :

$$\forall\,(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\in\mathbb{E}\times\mathbb{E} : \mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}).(\boldsymbol{H},\boldsymbol{K})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{K})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{B})$$

Soient $(\mathbb{E},\boldsymbol{N})$ un espace vectoriel normé de dimension 3 muni d'un produit scalaire. Alors, le produit vectoriel $\boldsymbol{f}$ est différentiable en tout point de $\mathbb{E}\times\mathbb{E}$ muni de la norme usuelle N_∞ ou toute autre norme équivalente et :

$$\forall\,(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\in\mathbb{E}\times\mathbb{E} : \mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}).(\boldsymbol{H},\boldsymbol{K})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{K})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{H},\boldsymbol{B})$$

Exemples d'applications :

Considérons deux fonctions vectorielles $\vec{U}(t)$ et $\vec{V}(t)$ dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension trois muni d'un produit scalaire, alors, les fonctions suivantes sont dérivables sur I :

$$f(t)=\vec{U}(t)\cdot\vec{V}(t)$$

$$g(t)=\vec{U}(t)\wedge\vec{V}(t)$$

Et, pour tout t de I on a :

$$f'(t)=\vec{U}'(t)\cdot\vec{V}(t)+\vec{U}(t)\cdot\vec{V}'(t)$$

$$g'(t)=\vec{U}'(t)\wedge\vec{V}(t)+\vec{U}(t)\wedge\vec{V}'(t)$$

Preuve :

f est la composée de deux fonctions :

$$\mathbb{R} \overset{m}{\rightarrow} \mathbb{E}\times\mathbb{E} \qquad \overset{k}{\rightarrow} \mathbb{E}$$

$$t \rightarrow \left(\vec{U}(t), \vec{V}(t)\right)$$

$$\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) \qquad \rightarrow \vec{X}\cdot\vec{Y}$$

Par composée, pour tout réel h :

$$df(t).h = dk\big(m(t)\big) \circ dm(t).h$$

Soit

$$f'(t)\, h = dk\left(\vec{U}(t), \vec{V}(t)\right).h\left(\vec{U}'(t), \vec{V}'(t)\right) = \left(\vec{U}'(t)\cdot\vec{V}(t) + \vec{U}(t)\cdot\vec{V}'(t)\right)\, h$$

d'où le résultat en faisant $h = 1$

On procède de façon analogue pour g

VI Application à la différentiabilité d'une norme associée à un produit scalaire

Soit $(\mathbb{E}, \boldsymbol{N})$ un espace vectoriel normé pour lequel la norme $\boldsymbol{N}$ est associée à un produit scalaire $\boldsymbol{f}$ c'est-à-dire, rappelons le, pour laquelle on a :

$$\forall\, \boldsymbol{X} \in \mathbb{E} :\ \boldsymbol{N}(\boldsymbol{X}) = \sqrt{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X})}$$

alors, l'application norme :

$$\boldsymbol{N} :\ \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$$

$$\boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{N}(\boldsymbol{X})$$

est une application différentiable sur $\mathbb{E}\backslash\{\boldsymbol{0}\}$ et :

$$\forall\, (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{H}) \in \mathbb{E}\backslash\{\boldsymbol{0}\} \times \mathbb{E}\ :\ \ \boldsymbol{dN}(\boldsymbol{A}).\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{H})}{\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A})}$$

Preuve :

1ère méthode : par les composées

L'application N est la composée de trois fonctions selon le schéma :

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{E} & \overset{g}{\to} & \mathbb{E}\times\mathbb{E} & \overset{f}{\to} & \mathbb{R} & \overset{\sqrt{}}{\to} & \mathbb{R} \\
A & \to & (A,A) & & & & \\
 & & (X,Y) & \to & f(X,Y) & & \\
 & & & & t & \to & \sqrt{t}
\end{array}
$$

g est différentiable en tout point A de $\mathbb{E}$ et :

$$dg(A).H = (H,H)$$

f est différentiable en tout point (X,Y) de $\mathbb{E}\times\mathbb{E}$ et :

$$df(X,Y).(H,K) = f(X,K) + f(H,Y)$$

$\sqrt{}$ Est différentiable en tout point t de $]0;+\infty[$ et :

$$d\sqrt{}(t).h = \frac{1}{2\sqrt{t}}\, h$$

donc, par composée, pour $\neq 0$, N est différentiable en A et :

$$dN(A).H = d\sqrt{}\Big(f\big(g(A)\big)\Big) \circ df\big(g(A)\big) \circ dg(A).H$$

$$= d\sqrt{}\big(f(A,A)\big) \circ df(A,A) \circ dg(A).H$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{f(A,A)}} \times df(A,A).(H,H)$$

$$= \frac{1}{2\,N(A)} \times \big(2\,f(A,H)\big) = \frac{f(A,H)}{N(A)}$$

2ème méthode : directement

Pour tout (A,H) de $\mathbb{E}\times\mathbb{E}$

$$N^2(A+H) - N^2(A) = 2\,f(A,H)$$

donc :

$$N(A+H) - N(A) = \frac{2\,f(A,H)}{N(A+H)+N(A)}$$

Soit :

$$N(A+H) - N(A) - \frac{f(A,H)}{N(A)} =$$

$$\frac{2\,f(A,H)}{N(A+H)+N(A)}-\frac{f(A,H)}{N(A)}=$$

$$f(A,H)\times\left(\frac{2}{N(A+H)+N(A)}-\frac{1}{N(A)}\right)$$

Rappelons l'inégalité de Schwarz :

$$|f(A,H)|\leq N(A)\,N(H)$$

Ainsi :

$$\left|N(A+H)-N(A)-\frac{f(A,H)}{N(A)}\right|\leq N(A)\,N(H)\times\left(\frac{2}{N(A+H)+N(A)}-\frac{1}{N(A)}\right)$$

Posons pour $H\neq 0$:

$$\gamma(H)=\frac{1}{N(H)}\left(N(A+H)-N(A)-\frac{f(A,H)}{N(A)}\right)$$

alors :

$$|\gamma(H)|\leq\frac{2\,N(A)}{N(A+H)+N(A)}-1$$

Prenons alors $A\neq 0$. La quantité majorante tendant vers 0 par continuité de la norme, on en déduit :

$$\lim_{H\to 0}\gamma(H)=0$$

D'où :

$$N(A+H)=N(A)+\frac{f(A,H)}{N(A)}+N(H)\,\gamma(H)$$

donc N différentiable en A et :

$$dN(A).H=\frac{f(A,H)}{N(A)}$$

Notons que la méthode des composées est plus rapide

VII Différentiabilité de l'inverse d'un automorphisme

Soit $\mathbb{E}_p$ un espace vectoriel de dimension finie p et $Aut(\mathbb{E}_p)$ l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{E}_p$.

L'application :

$$\boldsymbol{g :\ Aut(\mathbb{E}_p) \to Aut(\mathbb{E}_p)}$$

$$\boldsymbol{L \to L^{-1}}$$

est une application différentiable sur $\boldsymbol{Aut(\mathbb{E}_p)}$ et :

$$\boldsymbol{\forall\, H \in Aut(\mathbb{E}_p) :\ dg(L_0).H = -{L_0}^{-1} H\, {L_0}^{-1}}$$

<u>Preuve</u> :

Nous avions déjà établi au fichier sur la continuité dans les espaces vectoriels normés, que g était continue sur $Aut(\mathbb{E}_p)$.

Soit $L_0 \in Aut(\mathbb{E}_p)$ et $H \in \mathbb{B}(L_0, \alpha) \subset Aut(\mathbb{E}_p)$ alors :

$$g(L_0 + H) - g(L_0) = (L_0 + H)^{-1} - {L_0}^{-1}$$

$$= \left(I_p + {L_0}^{-1} \circ H\right)^{-1} \circ {L_0}^{-1} - {L_0}^{-1}$$

Posons alors :

$$M = {L_0}^{-1} \circ H$$

Et notons que :

$$\left(I_p + M\right) \circ \left(I_p - M\right) = I_p - M \circ M$$

Donc :

$$\left(I_p + M\right) \circ \left(I_p - M\right) + M \circ M = I_p$$

Soit :

$$I_p - M + \left(I_p + M\right)^{-1} \circ M \circ M = \left(I_p + M\right)^{-1}$$

Donc :

$$g(L_0 + H) - g(L_0)$$

$$= \left(I_p - {L_0}^{-1} \circ H + \left(I_p + {L_0}^{-1} \circ H\right)^{-1} \circ \left({L_0}^{-1} \circ H\right) \circ \left({L_0}^{-1} \circ H\right)\right) \circ {L_0}^{-1} - {L_0}^{-1}$$

La lourdeur de l'écriture invite à se passer du sigle de composition ∘ ainsi que de certaines parenthèses compte tenu de l'associativité de la composition, en prenant garde qu'il n'y a pas commutativité, ce qui aboutit à :

$$g(L_0 + H) - g(L_0)$$

$$= \left(I_p - {L_0}^{-1}H + \left(I_p + {L_0}^{-1}H\right)^{-1}{L_0}^{-1}H\, {L_0}^{-1}H\right){L_0}^{-1} - {L_0}^{-1}$$

$$= -{L_0}^{-1}H\, {L_0}^{-1} + \left(I_p + {L_0}^{-1}H\right)^{-1}{L_0}^{-1}H\, {L_0}^{-1}H\, {L_0}^{-1}$$

Soit :

$$\left|\left|\left| g(L_0 + H) - g(L_0) + {L_0}^{-1}H\, {L_0}^{-1} \right|\right|\right| = \left|\left|\left| \left(I_p + {L_0}^{-1}H\right)^{-1}{L_0}^{-1}H\, {L_0}^{-1}H\, {L_0}^{-1} \right|\right|\right|$$

$$\leq \left|\left|\left| \left(I_p + {L_0}^{-1}H\right)^{-1} \right|\right|\right| \; \left|\left|\left| {L_0}^{-1} \right|\right|\right|^3 |||H|||^2$$

D'où pour H tel que $|||H||| \neq 0$:

$$\frac{1}{|||H|||}\left|\left|\left| g(L_0 + H) - g(L_0) + {L_0}^{-1}H\, {L_0}^{-1} \right|\right|\right| \leq \left|\left|\left| \left(I_p + {L_0}^{-1}H\right)^{-1} \right|\right|\right| \; \left|\left|\left| {L_0}^{-1} \right|\right|\right|^3 |||H|||$$

La quantité majorante tendant vers 0 quand H tend vers l'application nulle, la différentiabilité de g en L_0 s'en déduit et

$$dg(L_0).H = -{L_0}^{-1}H\, {L_0}^{-1}$$