Applications différentiables

dans les espaces vectoriels normés de dimension finie

FICHIER EN COURS DE CONSTRUCTION

I Dérivée selon un vecteur

Dans la suite, $\mathbb{E}_n$ désigne un espace vectoriel de dimension n, $(\mathbb{E}, N)$ un espace vectoriel normé et f une application de $\mathbb{E}_n$ dans f.

1) Définition

Pour un vecteur U non nul de $\mathbb{E}_n$ on définit, lorsqu'elle existe la dérivée selon $\vec{u}$ au point A de $\mathbb{E}_n$ par :

$$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial U}(A) = \lim_{t \to 0} \frac{f(A + t\,U) - f(A)}{t}}$$

2) Propriété 1

Si f est différentiable en A, alors f est dérivable en A selon tout vecteur U non nul et :

$$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial U}(A) = df(A).U}$$

Preuve :

Si f est différentiable en A alors :

$$f(A + t\,U) - f(A) = df(A).(t\,U) + \|t\,U\|\gamma(t\,U)$$

avec :

$$\lim_{H \to 0} \gamma(H) = 0$$

donc :

$$N\left(\frac{f(A+t\,U)-f(A)}{t}-df(A).(U)\right)=\|U\|\,N\big(\gamma(t\,U)\big)$$

Or :

$$\lim_{t\to 0}\|U\|\,N\big(\gamma(t\,U)\big)=0$$

Donc :

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(A+t\,U)-f(A)}{t}=df(A).U$$

3) <u>Propriété 2</u>

Si $(\boldsymbol{U_1},\boldsymbol{U_2},\dots,\boldsymbol{U_n})$ est une base de $\mathbb{E}_{\boldsymbol{n}}$ et $\boldsymbol{f}$ différentiable en $\boldsymbol{A}$ alors, pour tout vecteur $\boldsymbol{H}$ de $\mathbb{E}_{\boldsymbol{n}}$, en posant :

$$\boldsymbol{H=h_1U_1+h_2U_2+\cdots+h_nU_n}$$

On a :

$$\boldsymbol{df(A).H=\frac{\partial f}{\partial U_1}(A)\,h_1+\frac{\partial f}{\partial U_2}(A)\,h_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial U_n}(A)\,h_n}$$

<u>Preuve</u> :

On a :

$$df(A).H=df(A).(h_1U_1+h_2U_2+\cdots+h_nU_n)$$

donc, par linéarité de l’application différentielle :

$$df(A).H=h_1\,df(A).U_1+h_2\,df(A).U_2+\cdots+h_n\,df(A).U_n$$

$$=\frac{\partial f}{\partial U_1}(A)\,h_1+\frac{\partial f}{\partial U_2}(A)\,h_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial U_n}(A)\,h_n$$

<u>Remarque</u> :

Il ne suffit pas que les dérivées selon les vecteurs d’une base soient définies pour que f soit différentiable, comme le montre l’exemple de la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \ si\ (x,y)\neq(0,0)\ \ et\ \ f(0,0)=0$$

Considérons la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$U_1 = (1,0)\,, U_2 = (0,1)$$

Nous avons

$$\frac{f(A + t\,U_1) - f(A)}{t} = \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial U_1}(A) = 0$$

$$\frac{f(A + t\,U_2) - f(A)}{t} = \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial U_2}(A) = 0$$

Intéressons nous à la différentiabilité au point $A = (0,0)$.

Si f était différentiable en A sa différentielle en A devrait être l'application nulle car on aurait :

$$df(A).H = \frac{\partial f}{\partial U_1}(A)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial U_2}(A)\,h_2 = 0$$

Or pour $U = (1,1)$ on a pour $t \neq 0$:

$$\frac{f(A + t\,U) - f(A)}{t} = \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

donc :

$$\frac{\partial f}{\partial U}(A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq df(A).U$$

f n'est donc pas différentiable en A et pourtant elle est continue en A car :

pour $x \neq 0$:

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x\,y|}{\sqrt{x^2}} \leq |y|$$

et pour $x = 0$:et $y \neq 0$:

$$|f(0,y)| = 0 \leq |y|$$

4) **Propriété 4**

Si $(\boldsymbol{U_1}, \boldsymbol{U_2}, \dots, \boldsymbol{U_n})$ est une base de $\mathbb{E}_n$ et si $\boldsymbol{f}$ admet des dérivées selon ces vecteurs de base dans un voisinage de A qui sont continues en ce point alors $\boldsymbol{f}$ est différentiable en $\boldsymbol{A}$

Remarque :

De façon plus large, il suffit que f admette des dérivées selon $n-1$ vecteurs de base dans un voisinage de A et qui soient continues en ce point, comme la preuve va le mettre en évidence.

Preuve :

Par récurrence sur n.

Initialisation : $n = 2$

Soit (U_1, U_2) une base d'un espace vectoriel de dimension deux $\mathbb{E}_2$ et f une fonction admettant des dérivées selon U_1 et U_2 sur une boule ouverte $\mathbb{B}(A, \alpha)$ qui sont continues en A.

$\mathbb{E}_2$ étant de dimension fini, nous pouvons prouver la propriété pour une norme quelconque, notamment la norme N_∞

Posons pour H tek que $A + H \in \mathbb{B}(A, \alpha)$:

$$A = a_1\, U_1 + a_2\, U_2$$

$$H = h_1\, U_1 + h_2\, U_2$$

$$\gamma(H) = \frac{1}{N_\infty(H)} \left(f(A+H) - f(A) - \frac{\partial f}{\partial U_1}(A)\, h_1 - + \frac{\partial f}{\partial U_2}(A)\, h_2 \right)$$

Nous avons :

$$N_\infty(H)\, \gamma(H) =$$

$$f\Big(\big((a_1 + h_1)\, U_1 + (a_2 + h_2)\, U_2\big)\Big) - f(a_1\, U_1 + (a_2 + h_2)\, U_2)$$

$$+ f(a_1\, U_1 + (a_2 + h_2)\, U_2) - f(a_1\, U_1 + a_2\, U_2)$$

$$- \frac{\partial f}{\partial U_1}(A)\, h_1 - \frac{\partial f}{\partial U_2}(A)\, h_2 =$$

Considérons sur l'intervalle $[0; h_1]$ la fonction :

$$\varphi(t) = f\big((a_1 + t)\, U_1 + (a_2 + h_2)\, U_2\big)$$

Cette fonction est dérivable sur $[0;h_1]$ donc continue également et :

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial U_1}\big((a_1+t)\,U_1 + (a_2+h_2)\,U_2\big)$$

Le théorème des accroissements finis s'applique et permet d'écrire :

$$\exists\,\theta(h_1) \in]0;1[\,:\ \varphi(h_1) - \varphi(0) = h_1\,\varphi(\theta(h_1)\,h_1)$$

Soit :

$$f\big((a_1+h_1)\,U_1 + (a_2+h_2)\,U_2\big) - f(a_1\,U_1 + (a_2+h_2)\,U_2) =$$

$$h_1\,\frac{\partial f}{\partial U_1}\big((a_1+\theta(h_1)\,h_1)\,U_1 + (a_2+h_2)\,U_2\big)$$

D'autre part, la différentiabilité de f en A permet d'écrire :

$$f(a_1\,U_1 + (a_2+h_2)\,U_2) - f(a_1\,U_1 + a_2\,U_2) - \frac{\partial f}{\partial U_2}(A)\,h_2 = N_\infty(h_2\,U_2)\,\gamma_1(h_2\,U_2)$$

avec :

$$\lim_{H\to 0}\gamma_1(H) = 0$$

Ainsi :

$$N_\infty(H)\,\gamma(H) =$$

$$h_1\left(\frac{\partial f}{\partial U_1}\big((a_1+\theta(h_1)\,h_1)\,U_1 + (a_2+h_2)\,U_2\big) - \frac{\partial f}{\partial U_1}(A)\right)$$

$$+N_\infty(h_2\,U_2)\,\gamma_1(h_2\,U_2)$$

Donc :

$$N\big(\gamma(H)\big)$$

$$\leq \frac{|h_1|}{N_\infty(H)}\,N\left(\frac{\partial f}{\partial U_1}\big((a_1+\theta(h_1)\,h_1)\,U_1 + (a_2+h_2)\,U_2\big) - \frac{\partial f}{\partial U_1}(A)\right) + \frac{N_\infty(h_2\,U_2)}{N_\infty(H)}\,N\big(\gamma_1(h_2\,U_2)\big)$$

Finalement :

$$N\big(\gamma(H)\big) \leq N\left(\frac{\partial f}{\partial U_1}\big((a_1+\theta(h_1)\,h_1)\,U_1 + (a_2+h_2)\,U_2\big) - \frac{\partial f}{\partial U_1}(A)\right) + N\big(\gamma_1(h_2\,U_2)\big)$$

La continuité de la dérivée selon U_1 montre que la quantité majorante est une fonction de H tendant vers 0 quand H tend vers le vecteur nul donc :

$$\lim_{H \to 0} \gamma(H) = 0$$

Il en résulte la différentiabilité de f au point A

Hérédité :

Soit un entier $n \geq 2$ pour lequel la propriété est vraie, montrons qu'elle est vraie pour l'entier suivant.

Soit $(U_1, U_2, \dots, U_{n+1})$ une base d'un espace vectoriel de dimension $n+1$ $\mathbb{E}_{n+1}$ et f une fonction admettant des dérivées selon U_1 ,U_2, …, U_{n+1} sur une boule ouverte $\mathbb{B}(A, \alpha)$ qui sont continues en A.

$\mathbb{E}_{n+1}$ étant de dimension fini, nous pouvons prouver la propriété pour une norme quelconque, notamment la norme N_∞

Posons pour H tek que $A + H \in \mathbb{B}(A, \alpha)$:

$$A = a_1\, U_1 + a_2\, U_2 + \cdots + a_{n+1}\, U_{n+1}$$

$$H = h_1\, U_1 + h_2\, U_2 + \cdots + h_{n+1}\, U_{n+1}$$

Notons :

$$B = a_1\, U_1 + a_2\, U_2 + \cdots + a_n\, U_n$$

$$K = h_1\, U_1 + h_2\, U_2 + \cdots + h_n\, U_n$$

Ainsi :

$$A = B + a_{n+1}\, U_{n+1}$$

$$H = K + h_{n+1}\, U_{n+1}$$

Notons :

$$\mathbb{E}_n = Vect(U_1, U_2, \dots, U_n)$$

Et g la fonction définie sur $\mathbb{E}_n$ par :

$$g(B) = f(B + a_{n+1}\, U_{n+1})$$

Alors :

$$f(A+H) - f(A) = f(B + K + (a_{n+1} + h_{n+1})\, U_{n+1}) - f(B + a_{n+1}\, U_{n+1})$$

$$= f(B + K + (a_{n+1} + h_{n+1})\, U_{n+1}) - f(B + K + a_{n+1}\, U_{n+1})$$

$$+ f(B + K + a_{n+1}\, U_{n+1}) - f(B + a_{n+1}\, U_{n+1})$$

L'existence d'une dérivée selon U_{n+1} sur un voisinage de A conduit comme dans le cas précédent à :

$$\exists\, \theta(h_{n+1}) \in]0;1[\, :$$

$$f(B + K + (a_{n+1} + h_{n+1})\, U_{n+1}) - f(B + K + a_{n+1}\, U_{n+1})$$

$$= h_{n+1}\, \frac{\partial f}{\partial U_{n+1}}(B + K + (a_{n+1} + \theta(h_{n+1}) h_{n+1})\, U_{n+1})$$

La continuité en A de la dérivée selon U_{n+1} permet d'écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial U_{n+1}}(B + K + (a_{n+1} + \theta(h_{n+1}) h_{n+1})\, U_{n+1}) = \frac{\partial f}{\partial U_{n+1}}(A) + \gamma_1(H)$$

avec :

$$\lim_{H \to 0} \gamma_1(H) = 0$$

L'hypothèse de récurrence permet d'écrire :

$$f(B + K + a_{n+1}\, U_{n+1}) - f(B + a_{n+1}\, U_{n+1})$$

$$= g(B + K) - g(B)$$

$$= \frac{\partial g}{\partial U_1}(B)\, h_1 + \frac{\partial g}{\partial U_2}(B)\, h_2 + \cdots + \frac{\partial g}{\partial U_n}(B)\, h_n + N_\infty(K)\, \gamma_2(K)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial U_1}(A)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial U_2}(A)\, h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial U_n}(A)\, h_n + N_\infty(K)\, \gamma_2(K)$$

avec :

$$\lim_{K \to 0} \gamma_2(K) = 0$$

Finalement :

$$f(A + H) - f(A)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial U_1}(A)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial U_2}(A)\, h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial U_{n+1}}(A)\, h_{n+1} + N_\infty(K)\, \gamma_2(K) + h_{n+1}\, \gamma_1(H)$$

Or :

$$N\big(N_\infty(K)\,\gamma_2(K) + h_{n+1}\,\gamma_1(H)\big) \le N_\infty(K)\,N\big(\gamma_2(K)\big) + |h_{n+1}|\,N\big(\gamma_1(H)\big)$$

$$\le N_\infty(H)\,\Big(N\big(\gamma_2(K)\big) + N\big(\gamma_1(H)\big)\Big)$$

Posons pour $H \neq 0$

$$\gamma(H) = \frac{1}{N_\infty(H)}\big(N_\infty(K)\,\gamma_2(K) + h_{n+1}\,\gamma_1(H)\big)$$

alors :

$$N\big(\gamma(H)\big) \le N\big(\gamma_2(K)\big) + N\big(\gamma_1(H)\big)$$

La quantité majorante tend vers 0 quand H tend vers le vecteur nul donc :

$$\lim_{H\to 0}\gamma(H) = 0$$

La différentiabilité de f au point A s'en déduit ce qui prouve l'hérédité de la propriété.

II <u>**Application aux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$**</u>

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Munissons $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique :

$$U_1 = (1,0,\dots,0)\,,U_2 = (0,1,\dots,0),\dots,U_n = (0,0,\dots,1)$$

Si les dérivées selon ces vecteurs existent en un point A, on les notent :

$$\frac{\partial f}{\partial U_1}(A) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A),\dots,\frac{\partial f}{\partial U_n}(A) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)$$

et si f est différentiable en A, sa différentielle est alors notée :

$$df(A) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)\,dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)\,dx_n$$

Sachant que les dx_i sont des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ définies pour tout :

$$H = (h_1, h_2; \dots, h_n)$$

par :

$$dx_i(H) = h_i$$

Ainsi :

$$df(A).H = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)\, dx_1(H) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)\, dx_2(H) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)\, dx_n(H)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)\, h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)\, h_n$$

$\mathbb{R}^{\mathrm{p}}$ étant alors muni de sa base canonique :

$$V_1 = (1,0,\dots,0)\,, V_2 = (0,1,\dots,0), \dots, V_p = (0,0,\dots,1)$$

nous pouvons décrire f sous la forme :

$$f(A) = \big(f_1(A), f_2(A), \dots, f_p(A)\big)$$

auquel cas pour tout $j \in [\![1;p]\!]$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(A) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(A), \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(A), \dots, \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(A)\right)$$

La matrice de l'application différentielle $\boldsymbol{df(A)}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ et $\mathbb{R}^{\mathrm{p}}$ est alors appelée matrice jacobienne de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{A}$ et définie par :

$$\boldsymbol{J_f(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(A) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(A) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(A) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(A) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(A)\right)}$$

Le déterminant de cette matrice est appelé jacobien de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{A}$ et noté $\boldsymbol{\left|J_f(A)\right|}$

Nous avons vu précédemment qu'une condition suffisante pour que f soit différentiable en un point A de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ était que $n-1$ colonnes de la matrice jacobienne soient définies continues sur un voisinage de A, ce qui dans la pratique s'avèrera bien utile pour déterminer le domaine de différentiabilité d'une telle fonction.

III **Théorème des fonctions implicites**

1) Approche intuitive

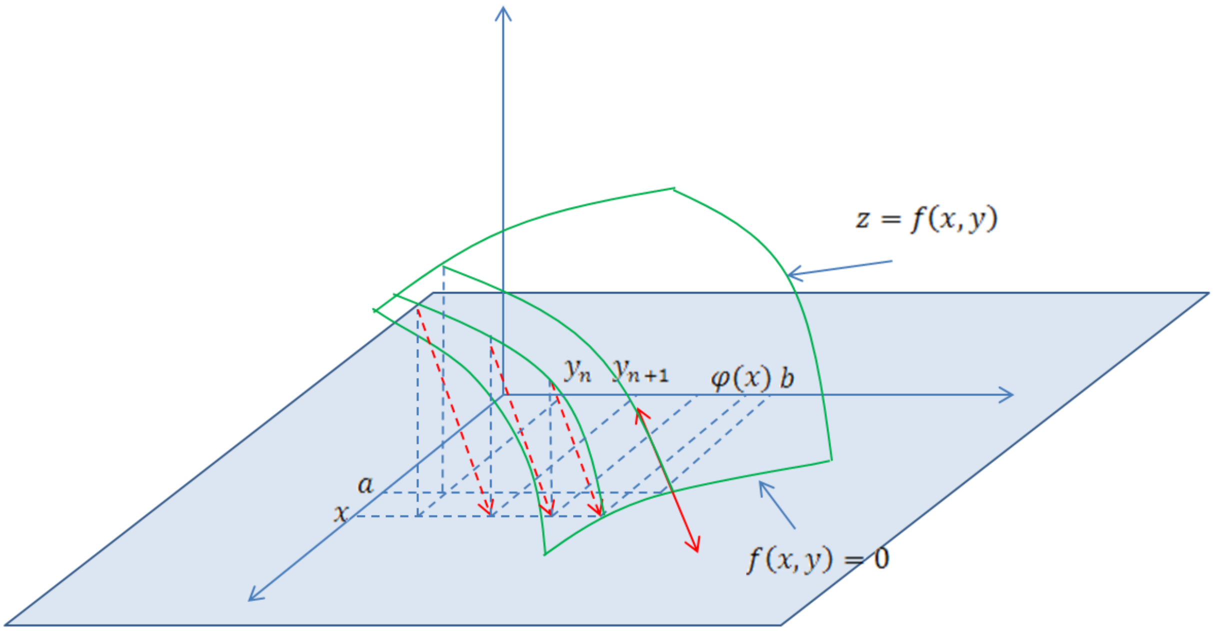
Considérons une fonction de deux variables réelles $f(x,y)$ qui soit différentiable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et qui en un point (a,b) de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ vérifie :

$$\frac{\partial f}{\partial y}\ continue\ sur\ \Omega$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\ \neq 0$$

$$f(a,b)=0$$

Représentons-nous cette fonction par une surface de l'espace d'équation $z=f(x,y)$



Considérons alors un réel x voisin de a et formons une suite de réels y_n proches de b en procédant selon le procédé itératif suggéré par la figure :

y_0 est pris quelconque mais proche de b. On peut prendre d'ailleurs b mais pour des commodités de représentation nous l'avons choisi sur la figure inférieur à b

y_n étant défini, on définit y_{n+1} comme suit : Dans le plan $(M(x,0,0),x,z)$ la courbe $z=f(x,y)$ admet au point $M\big(x,y_n,f(x,y_n)\big)$ une tangente d'équation :

$$z = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_n)\,(y - y_n) + f(x, y_n)$$

La continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ en (a, b) fait qu'on peut penser cette droite proche de la droite d'équation :

$$z = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\,(y - y_n) + f(x, y_n)$$

On définit alors y_{n+1} comme étant la valeur de y qui rend z nul soit :

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\,(y_{n+1} - y_n) + f(x, y_n)$$

D'où le schéma de récurrence :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)^{-1} f(x, y_n) \\ y_0 \text{ proche de } b \end{cases}$$

Le graphique suggère que cette suite y_n tend vers une unique valeur y telle que $f(x, y) = 0$

ce qui suggère que, pour x suffisamment voisin de a, il existe une unique valeur de y dans un voisinage de b telle que $f(x, y) = 0$. Ceci permet alors de définir une fonction implicite φ telle que dans un voisinage de (a, b), une boule ouverte de type carré par exemple, on ait :

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = y$$

Cette approche permet de formuler le résultat plus général qui suit et d'en guider la démonstration.

2) Théorème général

Soit $\mathbb{E}_m, \mathbb{E}_p$ deux espaces vectoriels de dimensions respectives, m, p et soit f une fonction différentiable sur un ouvert Ω de $\mathbb{E}_m \times \mathbb{E}_p$ à valeurs dans $\mathbb{E}_p$ telle que :

$$\frac{\partial f}{\partial Y}(X, Y) \text{ continue sur } \Omega$$

et vérifiant en un point (A, B) de $\mathbb{E}_m \times \mathbb{E}_p$:

$$\frac{\partial f}{\partial Y}(A, B) \text{ automorphisme de } \mathbb{E}_p$$

$$f(A, B) = \mathbf{0} \ \ (\text{vecteur nul de } \mathbb{E}_p)$$

alors :

il existe un voisinage $\mathbb{V}$ de A et un voisinage $\mathbb{W}$ de B tels que :

$$\forall\, X \in \mathbb{V} :\ \exists\,!\, Y \in \mathbb{W} :\ f(X, Y) = \mathbf{0}$$

On peut donc définir une application φ sur $\mathbb{V}$ telle que :

$$\forall\, (X, Y) \in \mathbb{V} \times \mathbb{W} :\ f(X, Y) = \mathbf{0} \ \Leftrightarrow\ \varphi(X) = Y$$

φ est alors une application de classe C_1 sur $\mathbb{V}$ et :

$$\forall\, X \in \mathbb{V} : d\varphi(X) = -\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\big(X, \varphi(X)\big)\right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial X}\big(X, \varphi(X)\big)$$

Preuve :

Les différents espaces vectoriels seront normés par la norme N_∞ associé à une de leurs bases.

Etape 1 : Existence et unicité de φ

Reprenons le schéma inspiré par l'approche :

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n - \left(\dfrac{\partial f}{\partial Y}(A, B)\right)^{-1} f(X, Y_n) \\ Y_0 = B \end{cases}$$

Posons :

$$g_X(Y) = Y - \left(\frac{\partial f}{\partial Y}(A,B)\right)^{-1} f(X,Y)$$

g_X est différentiable sur un voisinage de B et, en notant I_p l'application identité de $\mathbb{E}_p$:

$$dg_X(Y) = I_p - \left(\frac{\partial f}{\partial Y}(A,B)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial Y}(X,Y)$$

Considérons l'application :

$$k(X,Y) = dg_X(Y)$$

La continuité de la différentielle selon Y en (A,B) montre que :

$$\lim_{(X,Y)\to(A,B)} k(X,Y) = 0 \;\; (application\ linéaire\ nulle)$$

On en déduit :

$$\exists\, \alpha > 0 :\;\; \forall\, (X,Y) \in \mathbb{B}'\big((A,B),\alpha\big) :\; |||dg_X(Y)||| \le \frac{1}{2}$$

Soit en utilisant l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall\, (X,Y,Y') \in \mathbb{B}'(A,\alpha) \times \mathbb{B}'(B,\alpha) \times \mathbb{B}'(B,\alpha) :\; N_\infty\big(g_X(Y) - g_X(Y')\big) \le \frac{1}{2}\, N_\infty(Y - Y')$$

Montrons alors que $g_X\big(\mathbb{B}'(B,\alpha)\big) \subset \mathbb{B}'(B,\alpha)$

Soit $Y \in \mathbb{B}'(B,\alpha)$ alors :

$$N_\infty(g_X(Y) - B) \le N_\infty\big(g_X(Y) - g_X(B)\big) + N_\infty(g_X(B) - B)$$

$$\le \frac{1}{2}\, N_\infty(Y - B) + N_\infty\left(\left(\frac{\partial f}{\partial Y}(A,B)\right)^{-1} f(X,B)\right)$$

Or :

$$\lim_{X\to A} N_\infty\left(\left(\frac{\partial f}{\partial Y}(A,B)\right)^{-1} f(X,B)\right) = 0$$

donc :

$$\exists\, \beta > 0 :\; \forall\, X \in \mathbb{B}'(A,\beta) :\; N_\infty\left(\left(\frac{\partial f}{\partial Y}(A,B)\right)^{-1} f(X,B)\right) \le \frac{\alpha}{2}$$

Ainsi :

$$\forall\ (X,Y) \in \mathbb{B}'(A,\beta) \times \mathbb{B}'(B,\alpha) :\ N_\infty(g_X(Y) - B) \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

$g_X(Y)$ est donc une application strictement contractante sur la boule fermée $\mathbb{B}'(B,\alpha)$ qui est un espace métrique complet, pour tous les X de la boule fermée $\mathbb{B}'(A,\beta)$.

La suite :

$$\begin{cases} Y_{n+1} = g_X(Y_n) \\ Y_0 = B \end{cases}$$

est donc convergente à X fixé et tend vers une unique limite Y vérifiant :

$$Y = g_X(Y)$$

Or :

$$Y = g_X(Y) \qquad \Leftrightarrow \quad Y = Y - \left(\frac{\partial f}{\partial Y}(A,B)\right)^{-1} f(X,Y)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial Y}(A,B)\right)^{-1} f(X,Y) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(X,Y) = 0$$

Ceci prouve que pour tout X de la boule fermée $\mathbb{B}'(A,\beta)$ il existe un unique Y de la boule fermée $\mathbb{B}'(B,\alpha)$ tel que : $f(X,Y) = 0$, d'où l'existence et l'unicité de φ.

<u>Etape 2</u> : Continuité de φ

Soit $(X,X_0) \in \left(\mathbb{B}'(A,\beta)\right)^2$ alors :

$$N_\infty\big(\varphi(X) - \varphi(X_0)\big) = N_\infty\left(g_X\big(\varphi(X)\big) - g_{X_0}\big(\varphi(X_0)\big)\right)$$

$$\leq N_\infty\left(g_X\big(\varphi(X)\big) - g_X\big(\varphi(X_0)\big)\right) + N_\infty\left(g_X\big(\varphi(X_0)\big) - g_{X_0}\big(\varphi(X_0)\big)\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\ N_\infty\big(\varphi(X) - \varphi(X_0)\big) + N_\infty\left(\left(\frac{\partial f}{\partial Y}(A,B)\right)^{-1}\left(f\big(X,\varphi(X_0)\big) - f\big(X_0,\varphi(X_0)\big)\right)\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\ N_\infty\big(\varphi(X) - \varphi(X_0)\big) + \left|\!\left|\!\left|\left(\frac{\partial f}{\partial Y}(A,B)\right)^{-1}\right|\!\right|\!\right|\ N_\infty\left(f\big(X,\varphi(X_0)\big) - f\big(X_0,\varphi(X_0)\big)\right)$$

La quantité majorante tend vers 0 quand X tend vers X_0 donc :

$$\lim_{X \to X_0} N_\infty\big(\varphi(X) - \varphi(X_0)\big) = 0$$

φ est donc continue en X_0

Etape 3 : Différentiabilité de φ

Partie 1 :

Montrons d'abord que la différentielle selon Y est un automorphisme sur un voisinage de (A, B).

La fonction :

$$k(X, Y) = \frac{\partial f}{\partial Y}(X, Y)$$

est continue en (A, B) et $k(A, B) \in Aut(\mathbb{E}_p)$. Or $Aut(\mathbb{E}_p)$ est un ouvert de $End(\mathbb{E}_p)$. Il existe donc une boule ouverte $\mathbb{B}\big((A, B), r\big)$ incluse dans $\mathbb{B}'(A, \beta)$ sur laquelle on a :

$$\frac{\partial f}{\partial Y}(X, Y) \in Aut(\mathbb{E}_p)$$

Partie 2 :

Soit $X_0 \in \mathbb{B}(A, r)$ et H tel que $X_0 + H \in \mathbb{B}(A, r)$ alors

$$f\big(X_0 + H, \varphi(X_0 + H)\big) - f\big(X_0, \varphi(X_0)\big) = 0$$

Donc par différentiabilité en $\big(X_0, \varphi(X_0)\big)$:

$$\frac{\partial f}{\partial X}\big(X_0, \varphi(X_0)\big).H + \frac{\partial f}{\partial Y}\big(X_0, \varphi(X_0)\big).\big(\varphi(X_0 + H) - \varphi(X_0)\big)$$

$$+N_\infty\big(H, \varphi(X_0 + H) - \varphi(X_0)\big)\,\varepsilon(H) = 0$$

Notons :

$$L(X_0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\big(X_0, \varphi(X_0)\big)\right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial X}\big(X_0, \varphi(X_0)\big)$$

$$M(X_0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\big(X_0, \varphi(X_0)\big)\right)^{-1}$$

alors :

$$\varphi(X_0+H)-\varphi(X_0)=L(X_0).H+N_\infty\big(H,\varphi(X_0+H)-\varphi(X_0)\big)M(X_0)\,\varepsilon(H)$$

donc :

$$N_\infty\big(\varphi(X_0+H)-\varphi(X_0)\big)$$
$$\leq |||L(X_0)|||\;N_\infty(H)+N_\infty\big(H,\varphi(X_0+H)-\varphi(X_0)\big)\;|||M(X_0)|||\;N_\infty\big(\varepsilon(H)\big)$$
$$\leq |||L(X_0)|||\;N_\infty(H)+\Big(N_\infty(H)+N_\infty\big(\varphi(X_0+H)-\varphi(X_0)\big)\Big)\,|||M(X_0)|||\;N_\infty\big(\varepsilon(H)\big)$$

Or :

$$\lim_{H\to 0}|||M(X_0)|||\;\varepsilon(H)=0$$

Donc :

$$\exists\,\delta>0\,:\;\forall\,H\in\mathbb{B}(0,\delta)\;:\;|||M(X_0)|||\;\varepsilon(H)\leq\frac{1}{2}$$

Ainsi pour $H\in\mathbb{B}(0,\delta)$ tel que $X_0+H\in\mathbb{B}(A,\beta)$

$$N_\infty\big(\varphi(X_0+H)-\varphi(X_0)\big)$$
$$\leq |||L(X_0)|||\;N_\infty(H)+\frac{1}{2}\;N_\infty(H)+\frac{1}{2}\;\Big(N_\infty\big(\varphi(X_0+H)-\varphi(X_0)\big)\Big)$$

Donc :

$$N_\infty\big(\varphi(X_0+H)-\varphi(X_0)\big)\leq(2\;|||L(X_0)|||+1)\;N_\infty(H)$$

D'où pour $H\neq 0$:

$$\frac{1}{N_\infty(H)}N_\infty(\varphi(X_0+H)-\varphi(X_0)-L(X_0).H)\leq(2\;|||L(X_0)|||+1)N_\infty\;\big(M(X_0)\;\varepsilon(H)\big)$$

La quantité majorante tendant vers 0 quand H tend vers 0 on en déduit que φ est différentiable en X_0 et que :

$$d\varphi(X_0)=L(X_0)$$

<u>Etape 4</u> : Continuité de $d\varphi$

Nous avons sur $\mathbb{V}$

$$d\varphi(X)=-\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\big(X,\varphi(X)\big)\right)^{-1}\circ\frac{\partial f}{\partial X}\big(X,\varphi(X)\big)$$

Considérons l'application k de $End\big(\mathbb{E}_p\big)\times End\big(\mathbb{E}_p\big)$ dans $End\big(\mathbb{E}_p\big)$

$$k(L,M)=L\circ M$$

k est une application bilinéaire sur des espaces vectoriels de dimension finie, donc elle est continue sur $End(\mathbb{E}_p) \times End(\mathbb{E}_p)$

Les applications m et p définie sur $\mathbb{V}$ par :

$$m(X) = \frac{\partial f}{\partial Y}\big(X, \varphi(X)\big) \quad p(X) = \frac{\partial f}{\partial X}\big(X, \varphi(X)\big)$$

sont continues sur $\mathbb{V}$ par composition

L'application q définie sur $Aut(\mathbb{E}_p)$ par $q(L) = L^{-1}$ est comme nous l'avons montré dans le fichier sur la continuité des espaces vectoriels normés généraux, continue sur $Aut(\mathbb{E}_p)$.

$d\varphi$ apparait donc comme une composée de fonctions continues et est donc continue sur $\mathbb{V}$

IV **Théorèmes d'inversion**

1) Théorème d'inversion locale

Soit $\mathbb{E}_p$ un espace vectoriel de dimension p et soit f une fonction différentiable sur un ouvert Ω de $\mathbb{E}_p$ à valeurs dans $\mathbb{E}_p$ telle que :

$$\boldsymbol{df(X)} \ \ \textbf{continue sur } \boldsymbol{\Omega}$$

et en un point A de Ω :

$$\boldsymbol{df(A)} \ \ \textbf{automorphisme de } \mathbb{E}_p$$

alors :

il existe un voisinage ouvert $\mathbb{V}$ de A inclus dans Ω et un voisinage ouvert $\mathbb{W}$ de B tels que :

$$\forall \boldsymbol{Y} \in \mathbb{W} : \ \exists ! \boldsymbol{X} \in \mathbb{V} : \ \boldsymbol{f(X) = Y}$$

et la fonction ainsi définie :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g} : \ & \mathbb{V} \to \mathbb{W} \\ & \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{f(X)} \end{aligned}$$

est une fonction de classe C_1 ainsi que sa réciproque. C'est donc un C_1 difféomorphisme de $\mathbb{V}$ sur $\mathbb{W}$

<u>Preuve</u>

Considérons la fonction suivante F définie sur $\Omega \times \mathbb{E}_p$ à valeurs dans $\mathbb{E}_p$ par :

$$F(X, Y) = f(X) - Y$$

et posons :

$$B = f(A)$$

On a :

$$F \text{ est différentiable sur } \Omega \times \mathbb{E}_p$$

$$\frac{\partial F}{\partial X}(X, Y) = df(X) \ \ continue\ sur\ \Omega \times \mathbb{E}_p$$

$$\frac{\partial F}{\partial X}(A, B) = df(A)\ automorphisme\ de\ \mathbb{E}_p$$

$$F(A, B) = 0$$

Le théorème des fonctions implicites permet alors d'affirmer qu'il existe un voisinage ouvert de $\mathbb{V}_1$ de A et un voisinage ouvert $\mathbb{W}$ de B tels que :

$$\forall\, Y \in \mathbb{W} :\ \exists\, !\, X \in \mathbb{V}_1 :\ F(X, Y) = 0 \ \ (soit :\ f(X) = Y)$$

et on peut définir implicitement une fonction φ de classe C_1 de $\mathbb{W}$ dans $\mathbb{V}_1$ telle que :

$$\forall \in Y \in\ \mathbb{W} : F(\varphi(Y), Y) = 0\ \ soit\ :\ f\big(\varphi(Y)\big) = Y$$

Posons alors :

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \cap f^{-1}(\mathbb{W})$$

$\mathbb{V}$ est un voisinage ouvert de A. On peut ainsi définir la fonction :

$$h :\ \mathbb{W} \to \mathbb{V}$$

$$Y \to X = \varphi(Y) = f^{-1}(Y)$$

Notons g la réciproque de h :

$$g :\ \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$

$$X \to Y = f(X)$$

g et h sont toutes deux de classes C_1 sur leurs domaines respectifs $\mathbb{V}$ et $\mathbb{W}$. Donc g est un C_1 difféomorphisme de $\mathbb{V}$ sur $\mathbb{W}$.

2) Théorème d'inversion globale

Soit $\mathbb{E}_p$ un espace vectoriel de dimension p et soit f une fonction différentiable sur un ouvert Ω de $\mathbb{E}_p$ à valeurs dans $\mathbb{E}_p$ telle que :

$$\boldsymbol{f} \textbf{ injective}$$

$$\boldsymbol{df(X)} \textbf{ continue et automorphisme de } \mathbb{E}_p \ \boldsymbol{sur\ \Omega}$$

alors :

$$\boldsymbol{f(\Omega)} \textbf{ ouvert de } \mathbb{E}_p$$

$$\boldsymbol{f} \textbf{ difféomorphisme de classe } \boldsymbol{C_1\ de\ \Omega} \textbf{ sur } \boldsymbol{f(\Omega)}$$

Preuve :

Soit $B \in f(\Omega)$ alors :

$$\exists\,!\,A \in \Omega :\ B = f(A)$$

Le théorème d'inversion locale permet d'affirmer qu'il existe un voisinage ouvert de $\mathbb{V}$ de A et un voisinage ouvert $\mathbb{W}$ de B tels que la fonction

$$g :\ \mathbb{V} \to \mathbb{W}$$
$$X \to Y = f(X)$$

Soit un difféomorphisme de classe C_1 de $\mathbb{V}$ sur $\mathbb{W}$.

Or $\mathbb{W}$ est un ouvert contenant B et vérifie :

$$\mathbb{W} \subset f(\Omega)$$

Donc $f(\Omega)$ est voisinage de B. C'est donc un ouvert.

f^{-1} coincidant avec g^{-1} sur $\mathbb{W}$, elle est donc différentiable et de différentielle continue en tout point de $\mathbb{W}$ donc f est un difféomorphisme de classe C_1 de Ω sur $f(\Omega)$