

Diagonalisation d'une matrice symétrique: Ex 1

Nous nous intéressons à la diagonalisation dans \mathbb{R} des matrices du type :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & & b & b \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & & b & a \end{pmatrix}$$

Autrement dit, des matrices carrées d'ordre n ayant un même nombre a sur leur diagonale et des b partout ailleurs. Nous considérerons le cas non trivial où b est non nul sinon A est déjà une matrice diagonale.

Rappelons que diagonaliser une matrice dans \mathbb{R} , c'est déterminer une base de vecteurs propres et de valeurs propres associées, c'est-à-dire trouver des nombres réels λ associés à des vecteurs colonnes X d'ordre n différents de la colonne nulle tels que :

$$A X = \lambda X$$

Soit encore :

$$(A - \lambda I) X = 0$$

0 désignant le vecteur colonne d'ordre n nul et I la matrice identité d'ordre n .

Posant :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Nous sommes conduits à résoudre le système :

$$\begin{cases} (a - \lambda) x_1 + b x_2 \dots + b x_{n-1} + b x_n = 0 \\ b x_1 + (a - \lambda) x_2 \dots + b x_{n-1} + b x_n = 0 \\ \vdots \\ b x_1 + b x_2 \dots + (a - \lambda) x_{n-1} + b x_n = 0 \\ b x_1 + b x_2 \dots + b x_{n-1} + (a - \lambda) x_n = 0 \end{cases}$$

Numérotons alors les équations de 1 à n. En soustrayant la (n-1) à la n puis la (n-2) à la (n-1) et ainsi de suite jusqu'à la (1) à la (2), nous obtenons le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} (a - \lambda) x_1 + b x_2 \dots + b x_{n-1} + b x_n = 0 \\ -(a - b - \lambda) x_1 + (a - b - \lambda) x_2 \dots = 0 \\ \vdots \\ (a - b - \lambda) x_{n-1} = 0 \\ -(a - b - \lambda) x_{n-1} + (a - b - \lambda) x_n = 0 \end{cases}$$

Il y a alors deux cas à envisager :

1er cas : $\lambda = a - b$

Hormis la première, les (n-1) équations suivantes sont vérifiées. Le système équivaut alors à sa première équation, soit, après avoir remplacé λ par sa valeur :

$$b x_1 + b x_2 + \dots + b x_n = 0$$

Or b n'étant pas nul, cette équation équivaut à :

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$

Le sous espace propre E_{a-b} associé à la valeur propre $\lambda = a - b$ est alors l'ensemble des vecteurs colonnes X de la forme :

$$X = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \dots - x_n \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $x_2, x_3 \dots x_n$ nombres réels quelconques. Cet ensemble apparaît donc comme une combinaison de (n-1) vecteurs colonnes dont on peut vérifier qu'ils sont indépendants. C'est donc un espace vectoriel de dimension (n-1).

1er cas : $\lambda \neq a - b$

Après division par $(a - b - \lambda)$ des $(n-1)$ équations suivant la première, le système équivaut au suivant :

$$\begin{cases} (a - \lambda) x_1 + b x_2 + \dots + b x_n = 0 \\ x_1 = x_2 = \dots = x_n \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} (a + (n - 1)b - \lambda) x_1 = 0 \\ x_1 = x_2 = \dots = x_n \end{cases}$$

Pour qu'il y ait une colonne X non nulle associée à λ , il faut donc et il suffit que :

$$\lambda = a + (n - 1)b$$

L'espace propre associé à cette valeur propre est alors l'ensemble des vecteurs colonnes X de la forme :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

C'est donc un espace vectoriel de dimension 1 (droite vectorielle)

Conclusion

La matrice a deux valeurs propres :

$$\lambda_1 = a - b \quad \text{et} \quad \lambda_2 = a + (n - 1)b$$

Une base de vecteurs propres associé est formé par les vecteurs colonnes :

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad P_{n-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les $(n-1)$ premiers vecteurs propres étant associés à λ_1 et le dernier à λ_2

Remarque 1

La matrice que nous avons considéré présente une caractéristique particulière, elle est symétrique par rapport à sa diagonale descendante. Nous venons de prouver qu'elle est diagonalisable. Eh bien, sachez que c'est un résultat général valable pour toute matrice symétrique. Il y a même mieux. Faites les produits scalaires des vecteurs colonnes ci-dessus en les prenant deux à deux, vous verrez qu'ils sont nuls. Autrement dit, notre base de vecteurs propres est orthogonale. En normant chaque vecteur, on peut la rendre orthonormale, ce qui est un résultat général que nous espérons bien vous démontrer clairement un jour, si le temps le permet, car comme à chaque mortel, il nous est compté et la Science est un vaste sujet d'émerveillement inépuisable et non borné !

Remarque 2

Pour les inconditionnels du déterminant et du polynôme caractéristique, je vous les livre en sus.

Le déterminant étant, pour une matrice diagonalisable, le produit de ses valeurs propres avec leur ordre de multiplicité (la dimension de leur sous espace propre associé), nous avons :

$$\text{Det}(A) = \lambda_1 \times \lambda_1 \times \dots \times \lambda_1 \times \lambda_2$$

Soit :

$$\text{Det}(A) = (a + (n - 1)b) (a - b)^{n-1}$$

Et le polynôme caractéristique :

$$P_A(X) = (\lambda_1 - X) \times (\lambda_1 - X) \times \dots \times (\lambda_1 - X) \times (\lambda_2 - X)$$

Soit :

$$P_A(X) = (a + (n - 1)b - X) (a - b - X)^{n-1}$$