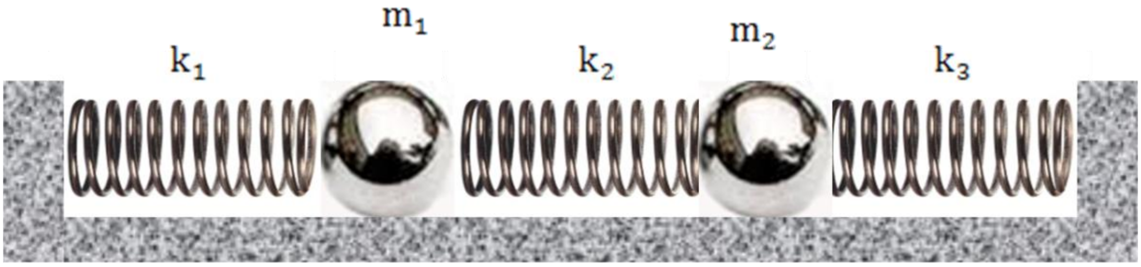
Diagonalisation des matrices

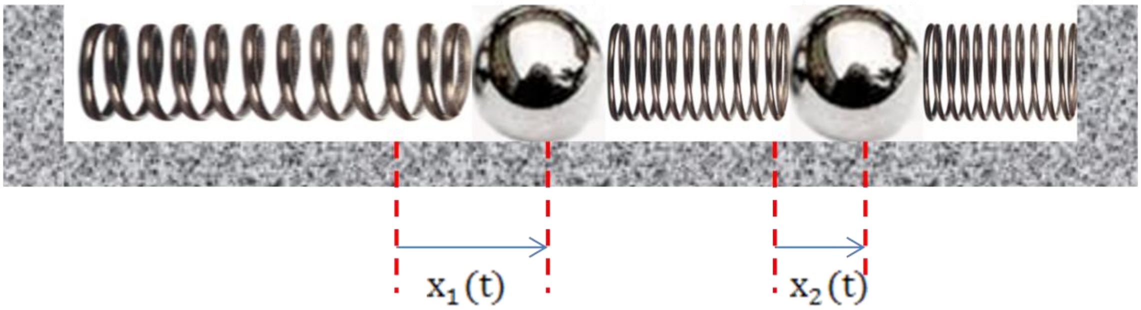
Nous allons vous montrer, en partant d'un problème de mécanique, l'intérêt d'introduire des objets appelés **matrices** et d'opérer ce que l'on appelle une **diagonalisation**, ce qui n'est rien d'autre que le prélude à une méthode d'analyse des vibrations d'une structure mécanique appelée **analyse modale**, vous permettant entre autres de goûter à un confort de plus en plus poussé dans les voitures modernes au lieu d'être secoué par de vilaines vibrations.

I Un problème d'oscillations

Considérons deux masses m_1 et m_2 reliées par des ressorts de raideurs respectives k_1, k_2, k_3 selon le schéma ci-dessous, et pouvant glisser sans frottements sur leurs supports.



Ecartons les deux masses de leur position d'équilibre et laissons le système osciller librement. L'origine des temps étant prise au moment du lâcher (mise en marche du chronomètre à cet instant), les positions des masses sont connues, à un instant t, par deux abscisses $x_1(t)$ et $x_2(t)$, l'axe des abscisses étant orienté de la gauche vers la droite.



La loi de Newton, appliquées aux deux masses conduit au système d'équations différentielles (en omettant la variable t pour ne pas surcharger) :

$$\begin{cases} m_1\, \ddot{x_1} = -k_1\, x_1 + k_2(\; x_2 - x_1) \\ m_2\, \ddot{x_2} = -\, k_2(\; x_2 - x_1) - k_3\, x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1\, \ddot{x_1} = -(k_1 + k_2)\, x_1 + k_2\, x_2 \\ m_2\, \ddot{x_2} = k_2\, x_1 - (k_2 + k_3)\, x_2 \end{cases}$$

Soit finalement :

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{x_1} = -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1}\, x_1 + \dfrac{k_2}{m_1}\, x_2 \\ \ddot{x_2} = \dfrac{k_2}{m_2}\, x_1 - \dfrac{k_2 + k_3}{m_2}\, x_2 \end{cases}}$$

Notre problème consiste alors à résoudre ce système avec des conditions initiales quelconques :

$$\boxed{\begin{cases} x_1(0) = a \\ x_2(0) = b \end{cases}}$$

Supposons donc pour simplifier que les valeurs des paramètres physiques sont :

$$\boxed{m_1 = m_2 = 1 \;;\quad k_1 = 1 \;;\; k_2 = 2 \;;\; k_3 = 3}$$

Le système devient alors :

$$\begin{cases} \ddot{x_1} = -3\,x_1 + 2\,x_2 \\ \ddot{x_2} = \;\;2\,x_1 - 5\,x_2 \end{cases}$$

C’est à partir de là que commence le royaume de l’algèbre vectorielle et matricielle. Non, non, ne partez pas en courant, ce n’est pas si compliqué !

II Vecteurs et matrices

Nous allons commencer par réécrire le système sous une forme plus manipulable :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x_1} \\ \ddot{x_2} \end{pmatrix} = \; x_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \; x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Les colonnes sont appelées **vecteurs colonnes**. Nous voyons déjà quelques manipulations sur ces objets :

<u>L’addition de deux vecteurs colonnes</u> :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

<u>La multiplication d’un nombre par un vecteur colonne</u> :

$$\propto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \propto x \\ \propto y \end{pmatrix}$$

La justification de l’appellation vecteur colonne tient au fait que, d’une part les coordonnées (x ; y) d’un vecteur du plan $\vec{u}$ dans une base $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ peuvent être mises en colonne, d’autre part si (x’ ; y’) désignent les coordonnées d’un autre vecteur du plan $\vec{v}$, alors les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont (x+x’ ; y+y’) et celles de $\propto\ \vec{u}$ sont ($\propto$ x ; $\propto$ y). Les opérations définies précédemment sur les colonnes traduisent alors ces propriétés.

Mais allons plus loin et convenons de noter :

$$x_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \; x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Nous définissons ainsi le produit d'un objet appelé **matrice** par un vecteur colonne :

$$x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Le membre de gauche est qualifié de **combinaison linéaire** de deux vecteurs colonnes, celui de droite, de **produit matrice vecteur**.

Notre système différentiel devient alors, avec ces notations :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x_1} \\ \ddot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

La matrice y figurant est appelée matrice du système ;

Si nous avions pris 0 comme valeur de k_2, ce qui revient à enlever le ressort situé entre les deux masses et les rendre indépendantes l'une de l'autre, le système aurait été :

$$\begin{cases} \ddot{x_1} = -\,x_1 \\ \ddot{x_2} = \ -3\,x_2 \end{cases}$$

Les variables x_1 et x_2 décrivant ce système serait alors dites découplées, ce qui se traduit une résolution immédiate sous forme :

$$\begin{cases} x_1 = \ A_1\cos(t) + \ B_1\sin(t) \\ x_2 = \ A_2\cos\left(\sqrt{3}\,t\right) + \ B_2\sin\left(\sqrt{3}\,t\right) \end{cases}$$

A_1, B_1, A_2, B_2 étant des constantes définies par les conditions initiales.

Notons que le système se serait mis sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x_1} \\ \ddot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

faisant apparaître une matrice qui ne possède des termes non nuls que sur sa diagonale descendante. Une telle matrice est qualifiée de **diagonale**.

Nous retiendrons :

Un système mécanique dont l'évolution est décrite par un système différentiel, dit linéaire sur des variables $x_1, x_2 \dots, x_n$ et associé à une matrice donnée, est découplé si la matrice est diagonale.

Ce point de vue est essentiel et forme le point de départ de la diagonalisation, qui va consister à déterminer un jeu de variables découplées, du moins tenter de le faire, car la diagonalisation n'est pas toujours possible, mais un bon mécanicien s'arrange souvent pour modéliser son problème de telle sorte qu'elle le soit, nous le verrons « un de ses jours si j'ai le temps, car j'ai tant de choses à vous dire !».

Mais auparavant, commençons par observer les propriétés des objets matrices et vecteurs que nous avons introduits.

<u>III Propriétés des opérations sur matrices et vecteurs</u>

1) <u>Linéarité du produit matrice vecteur</u>

Notons les deux propriétés suivantes du produit matrice vecteur, qualifiées de linéarité du produit :

$$\boxed{\begin{gathered}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\left[\propto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \propto \left[\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]\end{gathered}}$$

<u>Preuve</u> :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

$$= (x + x')\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + (y + y')\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$= x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + x'\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + +y\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$= x\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} + x'\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

CQFD (ce qu'il fallait démontrer)

$$\begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}\left[\propto \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\propto x\\\propto y\end{pmatrix}$$

$$= (\propto x)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + (\propto y)\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\propto x\, a\\\propto x\, b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\propto y\, c\\\propto y\, d\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\propto x\, a + \propto y\, c\\\propto x\, b + \propto y\, d\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\propto (x\, a + y\, c)\\\propto (x\, b + y\, d)\end{pmatrix}$$

$$= \propto \begin{pmatrix}x\, a + y\, c\\x\, b + y\, d\end{pmatrix}$$

$$= \propto \left[x\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right]$$

$$= \propto \left[\begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right]$$

CQFD

2) Produit matriciel

Considérons le vecteur colonne obtenu par le produit d'une matrice par un vecteur colonne :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Effectuons à nouveau le produit d'une nouvelle matrice par ce vecteur :

$$\begin{pmatrix} x" \\ y" \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Nous allons voir que cela revient à multiplier le vecteur initial par une matrice appelée matrice produit. En effet :

$$\begin{pmatrix} x" \\ y" \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} x" \\ y" \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \left[x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right]$$

Donc par linéarité du produit matrice vecteur :

$$\begin{pmatrix} x" \\ y" \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Notons :

$$\begin{pmatrix} a" \\ b" \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c" \\ d" \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Nous avons alors :

$$\begin{pmatrix} x" \\ y" \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a" \\ b" \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} c" \\ d" \end{pmatrix}$$

Nous reconnaissons un produit matrice vecteur :

$$\begin{pmatrix} x" \\ y" \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a" & c" \\ b" & d" \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nous poserons alors :

$$\boxed{\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a" & c" \\ b" & d" \end{pmatrix}}$$

Avec :

$$\begin{pmatrix} a" \\ b" \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c" \\ d" \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Cette opération est appelée **produit de matrices**. Attention, elle est qualifiée de produit et présentée de manière similaire au produit de deux nombres mais elle diffère sur un point essentiel : Elle n'est pas commutative comme le montre l'exemple simple suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En revanche, on démontre très aisément qu'elle est associative et distributive par rapport à une addition définie comme suit, ce qui justifie son appellation de produit :

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+a') & (c+c') \\ (b+b') & (d+d') \end{pmatrix}}$$

On définit également le produit d'un nombre par une matrice sous forme :

$$\propto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \propto a & \propto c \\ \propto b & \propto d \end{pmatrix}$$

Nous vérifions alors aisément la propriété :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\left[\propto \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}\right] = \propto \left[\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}\right]$$

3) <u>Matrice inverse</u>

Notons tout d'abord cette propriété remarquable :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a\,d - b\,c) & 0 \\ 0 & (a\,d - b\,c) \end{pmatrix}$$

Qui s'écrit encore avec les propriétés matricielles :

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = (a\,d - b\,c)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Or il est aisé de voir que :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Autrement dit la matrice formée d'une diagonale de 1 et des 0 ailleurs est sans effet dans la multiplication que ce soit à droite ou à gauche. On l'appelle **matrice identité** car si on la multiplie à une colonne elle donne la même colonne :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

Dans le cas où $(a\,d - b\,c) \neq 0$, on a alors :

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\left[\frac{1}{a\,d - b\,c}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

et ça marche dans l'autre sens :

$$\boxed{\left[\frac{1}{a\,d - b\,c}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

On note alors :

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a\,d - b\,c}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{a\,d - b\,c} & \dfrac{-c}{a\,d - b\,c} \\ \dfrac{-b}{a\,d - b\,c} & \dfrac{a}{a\,d - b\,c} \end{pmatrix}}$$

On la qualifie de **matrice inverse** de la matrice initiale.

III Simplifications d'écriture

Les matrices sont des tableaux de nombre pouvant être très grand, cela va jusqu'à des tableaux de centaines de milliers de lignes et de colonnes dans le domaine qui m'est familier de la mécanique. Eh oui, ça fait peur ! Non, rassurez vous, ce sont les ordinateurs qui s'en chargent et lorsque je soutenais ma thèse de doctorat en 1996, ils dépotaient trois milliards d'opérations élémentaires à la seconde, donc si on s'y prend bien, même avec des tailles pharamineuses, on peut s'en sortir.

En revanche, pour le développement théorique et la manipulation formelle de ces matrices, nous allons adopter des lettres pour simplifier les écritures.

Ainsi un vecteur colonne sera désigné par une lettre majuscule comme X ou Y et une matrice par une lettre majuscule comme M, N, P, Q, A, B, C, D, ça devrait suffire.

Les vecteurs colonnes formés par les colonnes d'une matrice notée A par exemple, seront notés A_1, A_2 etc.

Ainsi le système suivant :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

pourra être écrit de manière simplifiée sous la forme :

$$Y = A\, X$$

Avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Les vecteurs colonnes de A seront alors :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Le produit matrice vecteur s'écrit alors ainsi :

$$A\,X = x\,A_1 + y\,A_2$$

La matrice A pourra être également notée, pour plus de commodités, sous la forme faisant apparaître ses colonnes :

$$\boxed{A = (\,A_1 |\, A_2)}$$

Cela sera pratique notamment pour bien comprendre la manière d'exécuter un produit de deux matrices, ainsi :

$$\boxed{A\,B = A\,(\,B_1 |\, B_2) = (\,A\,B_1 |\, A\,B_2)}$$

La matrice inverse d'une matrice A, lorsqu'elle existe, sera notée A^{-1}.

Ce formalisme est heureux car il donne des écritures similaires à celles employées pour les nombres. Ainsi, en notant I la matrice identité :

$$\boxed{A\,A^{-1} = A^{-1}A = I}$$

Attention de ne pas écrire $A\,B = B\,\,A$, c'est en général faux pour les matrices, comme nous l'avons déjà vu.

IV Diagonalisation d'une matrice

Revenons sur notre problème initial :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Tentons de créer deux nouvelles variables y_1 et y_2 sous forme :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Autrement dit y_1 et y_2 sont toutes deux des combinaisons linéaires de x_1 et x_2.

Arrangeons nous pour que la matrice du système soit inversible, c'est-à-dire $(a\,d - b\,c) \neq 0$.

Notons :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \ddot{X} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} \quad \ddot{Y} = \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix}}$$

a, b, c d étant des nombres constants dans le temps nous avons, en dérivant le système de changement de variables :

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\ddot{Y} = P^{-1}\,\ddot{X}$$

Soit encore :

$$P\,\ddot{Y} = P\left(P^{-1}\,\ddot{X}\right) = (P\,P^{-1})\,\ddot{X} = I\,\ddot{X} = \ddot{X}$$

Ainsi :

$$\boxed{\ddot{X} = P\,\ddot{Y}}$$

De même :

$$\boxed{X = P\,Y}$$

Nous en déduisons la traduction de notre problème en notations simplifiées :

Le système initial :

$$\ddot{X} = A\,X$$

Qui par changement de variable devient :

$$P\,\ddot{Y} = A\,(P\,Y)$$

Soit :

$$\boxed{P\,\ddot{Y} = (A\,P)\,Y}$$

Voilà, nous y sommes !!!

Si nous parvenons alors à choisir P inversible tel que l'on ait $A\,P = P\,D$ avec D matrice diagonale, alors le système s'écrira :

$$P\,\ddot{Y} = P\,D\,Y$$

Soit, après multiplication par P^{-1} à gauche dans les deux membres :

$$\boxed{\ddot{Y} = D\,Y}$$

La matrice du système sur les nouvelles variables y_1 et y_2 sera alors diagonales et ces variables seront découplées. On pourra donc aisément déterminer leur évolution dans le temps puis en déduire celle des variables initiales.

Voyons alors comment déterminer P et D. Notons d'abord l'effet de la multiplication d'une matrice par une matrice diagonale à droite :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,e & c\,f \\ b\,e & d\,f \end{pmatrix}$$

Autrement dit les éléments diagonaux viennent multiplier les colonnes de même position.

Notons alors que $A\,P = P\,D$ s'écrit en notant :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$A\,(P_1 |\, P_2) = (\lambda_1 P_1 |\, \lambda_2 P_2)$$

Ainsi le problème revient à trouver deux vecteurs colonnes P_1 et P_2 et deux nombres réels λ_1 et λ_2 tels que :

$$\boxed{A\,P_1 = \lambda_1 P_1 \quad \text{et} \quad A\,P_2 = \lambda_2 P_2}$$

λ_1 et λ_2 seront appelées **valeurs propres** de la matrice A et P_1 et P_2 leurs **vecteurs propres** associés.

Trouver ces valeurs propres et ces vecteurs propres associés revient donc à trouver des nombres réels λ associés à des colonnes X telles que :

$$A\,X = \lambda\,X$$

Ce problème peut se réécrire sous la forme :

$$(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I})\,\mathrm{X} = \mathrm{O}$$

Où I désigne la matrice identité et O le vecteur colonne nul soit :

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour une valeur de λ donnée, les colonnes X satisfaisant l'équation précédente, forment un ensemble appelé **noyau** de la matrice $\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}$. Nous allons voir qu'à part quelques valeurs particulières de λ, ce noyau est généralement réduit à la seule colonne nulle O.

Posons pour cela :

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Notons alors que :

$$\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I} = \begin{pmatrix} (-3-\lambda) & 2 \\ 2 & (-5-\lambda) \end{pmatrix}$$

De telle sorte que notre problème revient à trouver une solution au système :

$$\begin{cases} (-3-\lambda)\,x_1 + 2\,x_2 = 0 \\ 2\,x_1 + (-5-\lambda)\,x_2 = 0 \end{cases}$$

Or ce système admet pour solution triviale pour tout λ, le vecteur colonne :

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour que ce ne soit pas la seule solution, il faut et il suffit que le déterminant du système soit égal à 0. Or ce déterminant est :

$$\det(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}) = (-3-\lambda)(-5-\lambda) - 2 \times 2 = \lambda^2 + 8\,\lambda + 11$$

On le note :

$$\begin{vmatrix} (-3-\lambda) & 2 \\ 2 & (-5-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 + 8\,\lambda + 11$$

C’est un polynôme de degré 2 en λ, appelé polynôme caractéristique de la matrice A. Ses racines vont donner les valeurs propres de A.

Calculons d’abord son discriminant :

$$\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 11 = 64 - 44 = 20$$

Le polynôme a donc deux racines réelles distinctes :

$$\lambda_1 = \frac{-8 + \sqrt{20}}{2} = \frac{-8 + 2\sqrt{5}}{2} = -4 + \sqrt{5}$$

$$\lambda_2 = \frac{-8 - \sqrt{20}}{2} = \frac{-8 - 2\sqrt{5}}{2} = -4 - \sqrt{5}$$

Notez que ces deux racines sont strictement négatives, ce qui trouvera un sens dans notre problème d’oscillations.

Cherchons alors les vecteurs propres associés à ces valeurs propres en commençant par la première. Nous reprenons donc le système précédent en remplaçant λ par la valeur de λ_1.

$$\begin{cases} \left(-3 - \left(-4 + \sqrt{5}\right)\right) x_1 + 2\, x_2 = 0 \\ 2\, x_1 + \left(-5 - \left(-4 + \sqrt{5}\right)\right) x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(1 - \sqrt{5}\right) x_1 + 2\, x_2 = 0 \\ 2\, x_1 + \left(-1 - \sqrt{5}\right) x_2 = 0 \end{cases}$$

Multiplions alors la deuxième équation par $\left(1 - \sqrt{5}\right)$, nous obtenons le système équivalent :

$$\begin{cases} \left(1 - \sqrt{5}\right) x_1 + 2\, x_2 = 0 \\ 2\left(1 - \sqrt{5}\right) x_1 + 4\, x_2 = 0 \end{cases}$$

Autrement dit, la deuxième équation devient la première multipliée par 2. Le système est donc équivalent à sa première équation :

$$\left(1 - \sqrt{5}\right) x_1 + 2\, x_2 = 0$$

Soit encore :

$$\boxed{x_2 = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}\ x_1}$$

Les vecteurs colonnes X associés à la valeur propre $-4+\sqrt{5}$ forment donc un ensemble de la forme :

$$E_{-4+\sqrt{5}} = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{2} \quad x_1 \end{pmatrix} = \frac{x_1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix} \text{ avec } x_1 \text{ réel} \right\}$$

Cet ensemble est donc l'ensemble de toutes les colonnes « proportionnelles », on dit colinéaire en Mathématiques, à la colonne :

$$\boxed{P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}}$$

On dit que de cet ensemble qu'il forme un **espace vectoriel de dimension 1** dont une **base** est le vecteur colonne P_1.

Faisons un travail analogue avec la deuxième valeur propre $\lambda_2 = -4-\sqrt{5}$:

$$\begin{cases} \left(-3-\left(-4-\sqrt{5}\right)\right)\ x_1 + 2\ x_2 = 0 \\ 2\ x_2 + \left(-5-\left(-4-\sqrt{5}\right)\right)\ x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(1+\sqrt{5}\right) x_1 + 2\ x_2 = 0 \\ 2\ x_2 + \left(-1+\sqrt{5}\right) x_1 = 0 \end{cases}$$

Là encore, la deuxième équation, multipliée par $\left(1+\sqrt{5}\right)$ donne deux fois la première. Le système équivaut donc à sa première équation, qui se met sous la forme :

$$\boxed{x_2 = -\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}\ x_1}$$

Les vecteurs colonnes X associés à la valeur propre $-4-\sqrt{5}$ forment donc un ensemble de la forme :

$$E_{-4-\sqrt{5}} = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\dfrac{(\sqrt{5}+1)}{2} \;\; x_1 \end{pmatrix} = \frac{x_1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{5}-1 \end{pmatrix} \text{ avec } x_1 \text{ réel} \right\}$$

Cet ensemble est donc l'ensemble de toutes les colonnes colinéaires à la colonne :

$$\boxed{P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{5}-1 \end{pmatrix}}$$

Formons avec les deux vecteurs propres ainsi trouvés la matrice :

$$\boxed{P = (\,P_1 \,|\, P_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \sqrt{5}-1 & -\sqrt{5}-1 \end{pmatrix}}$$

Vérifions alors que le déterminant de cette matrice n'est pas nul, même si le résultat peut être connu à l'avance par une théorie générale que nous développerons.

$$\det(P) = 2\left(-\sqrt{5}-1\right) - 2\left(\sqrt{5}-1\right) = -4\sqrt{5} \neq 0$$

Formons ensuite avec les deux valeurs propres la matrice diagonale :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} -4+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -4-\sqrt{5} \end{pmatrix}}$$

Nous avons alors rempli notre mission, à savoir trouver une matrice P inversible et une matrice diagonale D telle que : A P = P D.

Notre système différentiel devient alors en posant un nouveau vecteur colonne Y comme variable tel que X = P Y : $\ddot{Y} = D\,Y$, soit :

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & -4-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Soit encore sous forme de système :

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = -\left(4-\sqrt{5}\right) y_1 \\ \ddot{y}_2 = -\left(4+\sqrt{5}\right) y_2 \end{cases}$$

La suite est classique, on pose :

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{4-\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{4+\sqrt{5}}}$$

La solution générale du système est alors de la forme :

$$\boxed{\begin{cases} y_1 = B_1 \cos(\omega_1 t) + C_1 \sin(\omega_1 t) \\ y_2 = B_2 \cos(\omega_2 t) + C_2 \sin(\omega_2 t) \end{cases}}$$

B_1, C_1, B_2, C_2 étant des constantes définies par les conditions initiales.

En posant :

$$\boxed{\begin{cases} B_1 = A_1 \sin(\varphi_1)\ ,\ C_1 = A_1 \cos(\varphi_1) \\ B_2 = A_2 \sin(\varphi_2)\ ,\ C_2 = A_2 \cos(\varphi_2) \end{cases}}$$

nous pouvons l'écrire sous forme plus explicite :

$$\boxed{\begin{cases} y_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}}$$

faisant apparaître ainsi y_1 et y_2 comme deux fonctions sinusoïdales.

Nous en déduisons :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \sqrt{5}-1 & -\sqrt{5}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$$

Attention !!!!! C'est là que la liaison entre concepts mathématiques et concepts physiques se fait. Toute la théorie modale de la Mécanique tient dans ce simple exemple (enfin presque !). Je vous invite à bien suivre l'interprétation physique qui suit.

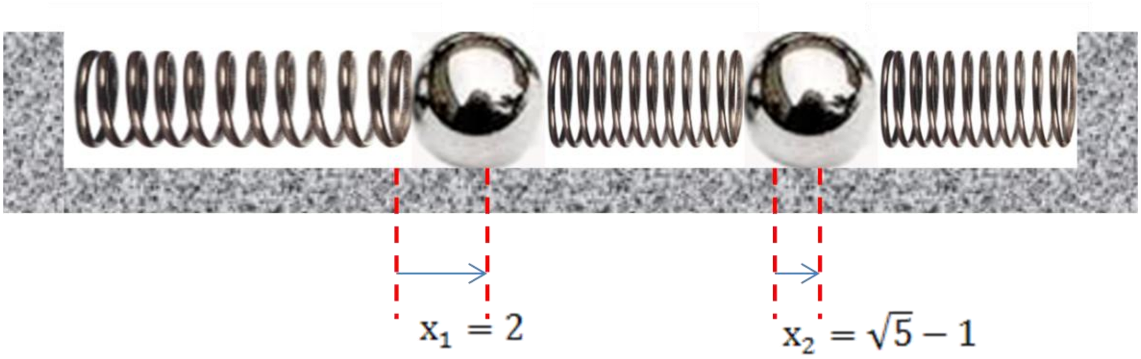
Nous voyons que le vecteur colonne X formé par les deux déplacements x_1 et x_2 des masses est une superposition de deux modes d'oscillations sinusoïdaux. En Mathématiques, on dit que le vecteur colonne X est à tout instant t combinaison linéaires des deux vecteurs propres P_1 et P_2 ce qui s'écrit :

$$X = y_1\, P_1 + y_2\, P_2$$

Soit en remettant la variable temps :

$$X(t) = y_1(t)\, P_1 + y_2(t)\, P_2$$

Nous pouvons alors facilement visualiser par la pensée la composante $y_1(t)\, P_1$ de $X(t)$ en traduisant le vecteur P_1 appelé **déformée associée au mode de vibration**, sur notre système mécanique oscillatoire comme ci-dessous.



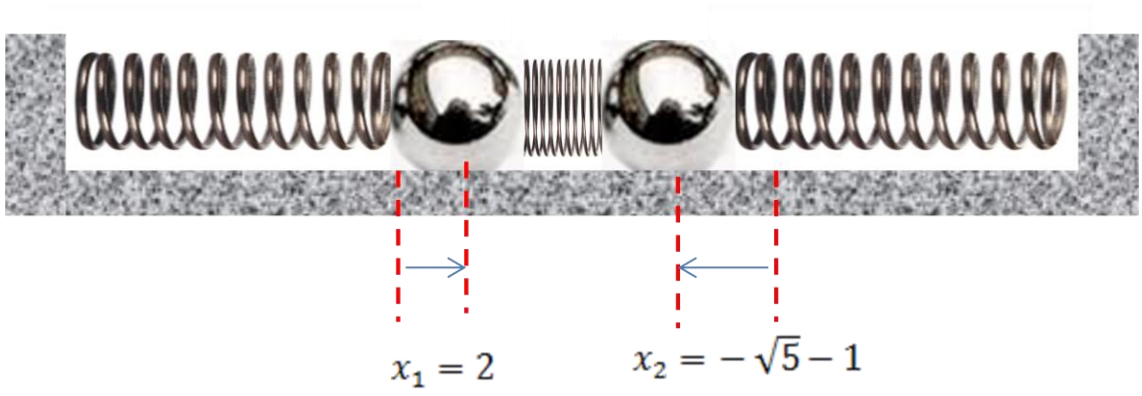
P_1 représente l'état qu'aurait le système s'il n'oscillait que sur sa première composante modale (soit $y_2(t) = 0$), pour une amplitude A_1 égale à 1 et un sinus valant 1 dans l'expression de $y_1(t)$. L'oscillation associée à ce mode se fait à la fréquence dite propre de :

$$\boxed{f_1 = \frac{\omega_1}{2\,\pi} = \frac{\sqrt{4-\sqrt{5}}}{2\,\pi} \approx \quad 0{,}21 \text{ Hz}}$$

Soit une période :

$$\boxed{T_1 = \frac{1}{f_1} \approx \quad 4{,}7 \text{ s}}$$

P_2 peut être interprété de manière analogue et sa déformée représentée ci-dessous.



La fréquence d’oscillations est :

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\,\pi} = \frac{\sqrt{4+\sqrt{5}}}{2\,\pi} \approx \quad 0{,}40 \text{ Hz}$$

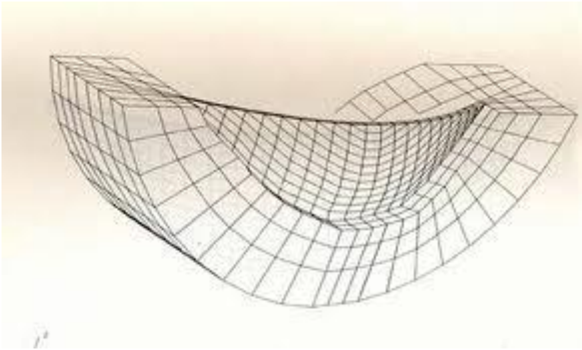
Soit une période :

$$T_2 = \frac{1}{f_2} \approx \quad 2{,}5 \text{ s}$$

Par convention, le mode de vibration associé à la plus basse fréquence, c'est-à-dire de caractéristiques P_1 et f_1 dans notre exemple, est appelé **premier mode de vibration** et f_1 , **première fréquence propre de vibration**.

Notons que notre système mécanique étudié présentait deux inconnues x_1 et x_2 comme fonctions du temps à déterminer en résolvant un système d’équations différentielles couplant x_1 et x_2. Ces inconnues déterminant la taille du système à résoudre, sont appelées **degrés de liberté** du système mécanique. Leur connaissance à tout instant fixe la position du système à ce même instant. Il en a résulté deux modes propres de vibrations, donc deux fréquences propres.

Ce résultat est général. L’étude des vibrations d’une structure conduit à introduire un nombre de degrés de liberté finis (déplacements selon trois axes de références en des points d’un maillage de la structure, voir dessin ci dessous). Un procédé de projection particulier appelé, méthode des éléments finis, conduit à un système différentiel sur ces degrés de liberté.



Si le système est de taille n, il en résulte par résolution analogue à ce qui a été fait ci-dessus, une mise en évidence que le vecteur X des degrés de liberté est une combinaison linéaire de n vecteurs propres, dont les coefficients sont des fonctions sinusoïdales (en l'absence d'amortissement toutefois dans le système, sinon il faut rajouter devant ces fonctions une fonction exponentielle d'amortissement).

Nous pouvons résumer ceci sous la forme :

Les oscillations libres d'une structure mécanique bornée (les vibrations restent localisées et ne se perdent par à l'infini comme dans le cas d'un rail, sujet que je connais bien puisque c'était celui de ma thèse) sont la superposition de modes propres de vibrations sinusoïdaux.

La recherche des modes propres se fait par recherche des vecteurs propres et des valeurs propres d'une matrice appelée matrice dynamique.

Les vecteurs propres de cette matrice s'interprètent comme les déformées instantanées des modes propres et les valeurs propres permettent de calculer les fréquences propres (et les facteurs d'amortissement éventuels)

Voyons alors ce qui se passe si nous forçons le système en imposant par exemple à notre système mécanique précédent une force sinusoïdale de fréquence f. Si f est proche d'une des fréquences propres, le système entre en **résonance**. S'il n'y avait pas d'amortissement, ce qui est faux dans la réalité, l'oscillation aurait (dans le modèle mathématique) une amplitude tendant vers l'infini. En pratique, puisqu'il y a toujours un peu d'amortissement, cela se traduit par le fait que la structure va vibrer selon de grandes amplitudes et probablement être très rapidement ruinée si ce n'est pas quasi instantanément.

La connaissance des fréquences propres est donc essentielle à l'ingénieur mais également celle des déformées. Pour une structure comme une vitre de verre rectangulaire, la déformée ferait en effet apparaître un **ventre de vibration** (là où l'amplitude est maximale) au centre du rectangle.

Cette connaissance peut être très pratique et vous éviter bien des déboires. Imaginez que le pare brise de votre véhicule reçoive un gravillon à grande vitesse vers son centre. Il y a fort à parier que votre pare brise se fissure et là « Car glouche remplace ! »

Si vous voulez évitez la lourde addition (même si c'est votre assurance qui paie, car au bout de deux impacts elle a tendance contre toute déontologie, à majorer votre prime mais le mot déontologie a-t-il encore un sens aujourd'hui ?) je vous conseille, lorsque vous êtes sur une route fraîchement gravillonnée et que vous voyez un camion menaçant venir en sens inverse, de positionner trois doigts autour du centre de votre pare brise. De ce fait, si un gravillon percute ce dernier, le premier mode sera « tué » par vos doigts servant d'amortisseur. Ce sont eux qui dissiperont une grande partie de la vibration. Rassurez vous, votre bras ne s'effritera pas pour autant !.

Inversement, mais n'en faites pas mauvais usage, si vous positionnez un pot vibrant (émettant une force sinusoïdale de fréquence réglable) sur le ventre de vibration d'une structure (que la précieuse analyse mathématique modale vous révèle donc) comme par exemple le centre d'une vitre rectangulaire faite d'un verre sécurité, alors en cherchant la première fréquence propre par augmentation successive de la fréquence du pot vibrant à partir d'une fréquence basse, vous ne devriez pas attendre trop longtemps pour voir une fissure apparaître.

Voyez sur internet comment la houle et le vent ont eu raison d'un pont aux USA (voir effondrement du pont de Tacoma) en le sollicitant malencontreusement à une de ses fréquences propres.

Enfin et pour finir, je vous conseille la lecture de mon papier intitulé Ondes, afin de découvrir les modes propres de vibrations d'une corde fixée à ses deux extrémités (corde de guitare par exemple).