Diagonalisation en couple de matrices carrées

Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif et $\mathbb{K}_{col}^{n}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des matrices-colonne à n lignes à coefficients dans $\mathbb{K}$, $M_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, $D_n(\mathbb{K})$ le sous espace des matrices diagonales et $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe pour la composition des matrices carrées de $M_n(\mathbb{K})$ inversibles.

<u>1) Valeurs propres et sous espaces propres d'un couple de matrices</u>

Dans la suite (A, B) désigne un couple de matrices de $M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

<u>Définition 1</u>

On note :

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{K}_{\boldsymbol{col}}^{\boldsymbol{n}} : \ \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\lambda}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{X}\}$$

On dit que $\boldsymbol{\lambda}$ est valeur propre du couple $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ si $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \neq \{\boldsymbol{0}\}$ autrement dit s' il existe un vecteur colonne $\boldsymbol{X} \in \mathbb{K}_{\boldsymbol{col}}^{\boldsymbol{n}} \backslash \{\boldsymbol{0}\}$ tel que :

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\lambda}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{X}$$

Dans ce cas, $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ est appelé sous espace propre du couple $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ associé à la valeur propre $\boldsymbol{\lambda}$

On appelle spectre du couple $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ l'ensemble de ses valeurs propres et on le note $\boldsymbol{S_p}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$

<u>Propriétés 1</u>

a) $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}_{\boldsymbol{col}}^{\boldsymbol{n}}$.

b) Si $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{K} \backslash \{\boldsymbol{0}\}$:

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \mathbb{E}_{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\lambda}}}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A})$$

c) Si $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}$:

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{ker}(\boldsymbol{A})$$

Preuve :

a) Soit $(X, Y, \alpha) \in \mathbb{E}_{\lambda}(A, B) \times \mathbb{E}_{\lambda}(A, B) \times \mathbb{K}$ alors :

$$A\,X = \lambda\,B\,X, \qquad A\,Y = \lambda\,B\,Y$$

Donc :

$$A\,(X + \alpha\,Y) = A\,X + \alpha\,A\,Y = \lambda\,B\,X + \alpha\,\lambda\,B\,Y = \lambda\,(B\,X + \alpha\,B\,Y)$$

Donc :

$$X + \alpha\,Y \in \mathbb{E}_{\lambda}(A, B)$$

b) on a :

$$X \in \mathbb{E}_{\lambda}(A,B) \Leftrightarrow A\,X = \lambda\,B\,X \;\Leftrightarrow B\,X = \frac{1}{\lambda}\;A\,X \Leftrightarrow X \in \mathbb{E}_{\frac{1}{\lambda}}(A,B)$$

c) on a :

$$X \in \mathbb{E}_0(A,B) \Leftrightarrow A\,X = 0\,B\,X \;\Leftrightarrow A\,X = 0 \Leftrightarrow \;X \in ker(A)$$

<u>Définition 2</u>

On appelle polynôme caractéristique du couple $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ le polynôme défini pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{K}$ par :

$$\boldsymbol{\pi_{(A,B)}(\lambda) = det(\lambda\,B - A)}$$

Dans le cas où $\boldsymbol{B = I_n}$, nous noterons :

$$\boldsymbol{\pi_A(\lambda) = \pi_{(A,I_n)}(\lambda) = det(\lambda\,I_n - A)}$$

Et nous conviendrons de l'appeler polynôme caractéristique de $\boldsymbol{A}$ sachant que :

$$\boldsymbol{det(A - \lambda\,I_n) = (-1)^{\,n} det(\lambda\,I_n - A)}$$

<u>Propriétés 2</u>

a) $\boldsymbol{\pi_{(A,B)}(\lambda)}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $\boldsymbol{n}$

b) si $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{K}\backslash\{\boldsymbol{0}\}$:

$$\boldsymbol{\pi_{(B,A)}(\lambda) = (-\lambda)^n\,\pi_{(A,B)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$$

c) $\boldsymbol{\lambda}$ est valeur propre du couple $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ si et seulement si $\boldsymbol{\pi_{(A,B)}(\lambda) = 0}$

d) $\boldsymbol{\pi_{(A,B)}(\lambda)}$ est de degré $\boldsymbol{n} \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{B}$ inversible $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{0 \notin S_p(B,A)}$

Preuve :

a) par récurrence sur n.

Initialisation : pour $n = 1$ c'est trivial

Hérédité : on suppose la propriété vraie pour $n \geq 1$.

Soit alors (A,B) un couple de matrices de $M_{n+1}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, en développant le déterminant par rapport à la première colonne, on a :

$$\pi_{(A,B)}(\lambda) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n+1+1}\,(\lambda\,b_{i1} - a_{i1})\,\Delta_{i1}(\lambda)$$

où $\Delta_{i1}(\lambda)$ est le déterminant d'une matrice d'ordre n de la forme $\lambda\,B_i - A_i$, où A_i et B_i sont obtenus en supprimant respectivement dans A et B la première colonne et la $ième$ ligne. Ainsi :

$$\Delta_{i1}(\lambda) = \pi_{(A_i,B_i)}(\lambda)$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que le degré de chacun des $\Delta_{i1}(\lambda)$ est inférieur ou égal à n et donc que le degré de $\pi_{(A,B)}(\lambda)$ est inférieur ou égal à $n + 1$.

b) si $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$:

$$\pi_{(B,A)}(\lambda) = \ det(\lambda\, A - B) = \ det\left(-\lambda\, \left(B - \frac{1}{\lambda}\, A\right)\right) = (-\lambda)^n\, \pi_{(A,B)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

c)

$$\lambda \in S_p(A,B) \Leftrightarrow \exists\, X \in \mathbb{K}^n_{col}\backslash\{0\} : A\, X = \lambda\, B\, X$$

$$\Leftrightarrow \exists\, X \in \mathbb{K}^n_{col}\backslash\{0\} : (\lambda\, B - A)\, X = 0$$

$$\Leftrightarrow\ ker(\lambda\, B - A) \neq \{0\}$$

$$\Leftrightarrow\ det(\lambda\, B - A) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \pi_{(A,B)}(\lambda) = 0$$

d)

$$0 \in S_p(B,A) \Leftrightarrow \exists\ \ X \in \mathbb{K}^n_{col}\backslash\{0\} : B\, X = 0\, A\, X$$

$$\Leftrightarrow\ ker(B) \neq \{0\}$$

$$\Leftrightarrow\ B\ non\ inversible$$

Donc :

$$\boxed{B \text{ inversible} \Leftrightarrow\ 0 \notin S_p(B,A)}$$

Si B inversible alors :

$$\pi_{(A,B)}(\lambda) = \ det(\lambda\, B - A) = det\big(B\, (\lambda\, I_n - B^{-1}A)\big) = det(B)\, det(\lambda\, I_n - B^{-1}A)$$
$$= det(B)\ \ \pi_{B^{-1}A}(\lambda)$$

Or $det(B) \neq 0$ donc le degré de $\pi_{(A,B)}$ est celui de $\pi_{B^{-1}A}$ donc n

<u>Réciproquement</u>, supposons que le degré de $\pi_{(A,B)}(\lambda)$ soit n et posons :

$$\pi_{(A,B)}(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, \lambda^k\ \ , a_n \neq 0$$

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$:

$$\pi_{(B,A)}(\lambda) = (-\lambda)^n\, \pi_{(A,B)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = (-\lambda)^n \sum_{k=0}^{n} a_k\, \frac{1}{\lambda^k}\ = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} a_k\, \lambda^{n-k}$$

Deux polynômes prenant les même valeurs sur un nombre infini de valeurs de $\mathbb{K}$ étant égaux , on en déduit :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K} :\ \pi_{(B,A)}(\lambda) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} a_k\, \lambda^{n-k}$$

Donc :

$$\pi_{(B,A)}(0) = (-1)^n\, a_n \neq 0$$

Donc $0 \notin S_p(B, A)$ et donc B inversible d'où :

$$\boxed{B\ inversible \Leftrightarrow\ \pi_{(A,B)}(\lambda) \text{ est de degré } n}$$

2) Diagonalisabilité d'un couple de matrice

Définition 3 :

Soit (A, B) un couple de matrices de $M_n(\mathbb{K})$, on dit que le couple (A, B) est diagonalisable si il existe deux matrices P et Q de $GL_n(\mathbb{K})$ et deux matrices D et D' de $D_n(\mathbb{K})$telles que :

$$\boldsymbol{A = P\,D\,Q^{-1}}$$

$$\boldsymbol{B = P\,D'\,Q^{-1}}$$

Propriété 3 :

Si B inversible et $B^{-1}A$ diagonalisable alors le couple (A, B) est diagonalisable

Preuve :

a) Il existe Q inversible et D diagonale telles que :

$$B^{-1}A = Q\,D\,Q^{-1}$$

Donc :

$$A = (B\,Q)\,D\,Q^{-1}$$

Et :

$$B = (B\,Q)\,I_n\,Q^{-1}$$

Il suffit de poser :

$$P = B\,Q, \qquad D' = I_n$$

3) Exemples :

Exemple 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B^2 = I_3$ donc B inversible et $B^{-1} = B$ donc le couple (A, B) est diagonalisable.

$$B^{-1}\,A = B\,A = A$$

$$\pi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -\lambda & 0 \\ -1 & \lambda & -\lambda \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2\,(\lambda-3)$$

Donc :

$$S_p(A,B) = S_p(B^{-1}\,A) = S_p(\,A) = \{0,3\}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{E}_0(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow z = -x-y$$

$$\mathbb{E}_0(A) = Vect\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{E}_3(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -2\,x+y+z=0 \\ x-2\,y+z=0 \\ x+y-2\,z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\,x+y+z=0 \\ -3\,y+3\,z=0 \\ 3\,y-3\,z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z$$

$$\mathbb{E}_3(A) = Vect\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

On pose :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad P = B\,Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$A = B\,A = (B\,Q)\,D\,Q^{-1} = P\,D\,Q^{-1}$$

$$B = P\,I_3\,Q^{-1}$$

Exemple 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(\lambda\,B - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)$$

$$S_p(A,B) = \{1\}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{E}_1(A,B) \Leftrightarrow y = 0$$

$$\mathbb{E}_1(A,B) = Vect\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

Il n’existe donc pas de base de vecteurs propres du couple (A,B) pourtant le couple (A,B) est diagonalisable car si on pose $P = A, D = A, D' = B$:

$$A = P\,D\,P^{-1}$$

$$B = P\,D'\,P^{-1}$$