Matrices diagonalisables commutantes

On notera dans la suite I la matrice carrée identité d'ordre m où m est un entier naturel non nul et $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel des colonnes à m éléments dans un corps $\mathbb{K}$

<u>Première partie :</u> Cas de deux matrices :

Soit deux matrices carrées $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ de même ordre $\boldsymbol{m}$, diagonalisables et qui commutent, c'est-à-dire vérifiant :

$$\boldsymbol{A\,B = B\,A}$$

Alors il existe une base commune de diagonalisation de ces matrices. Autrement dit, il existe deux matrices diagonales $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{D'}$ et une matrice inversible $\boldsymbol{R}$ telles que :

$$\boldsymbol{A = R\,D\,R^{-1}}$$

$$\boldsymbol{B = R\,D'\,R^{-1}}$$

<u>Preuve</u> :

<u>Première méthode</u> : sans utiliser le formalisme d'endomorphisme.

1) Montrons que tout sous espace propre de A est stable par B.

Soit λ une valeur propre de A et $X \in ker(A - \lambda\, I)$ alors :

$$A\,B\,X = B\,A\,X = B\,\lambda\,X = \lambda\,B\,X$$

Donc $B\,X \in ker(A - \lambda\, I)$

2) Notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les r valeurs propres distinctes de A et $n_1, n_2, \dots, n_r$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Considérons pour chaque sous espace propre $ker(A - \lambda_i\, I)$ une base $\left(P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{in_i}\right)$. Alors l'union de ces bases forme une base de $\mathbb{E}$ et définit une matrice inversible P.

Le produit $B\,P$ est donc une matrice formée de la somme de r matrice carrées de la forme :

$$\left(0 \dots 0, B\,P_{i1}, B\,P_{i2}, \dots, B\,P_{in_i}, 0 \dots 0\right)$$

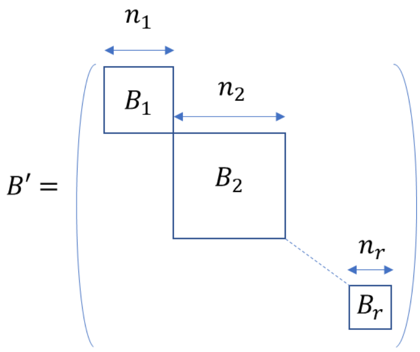
Compte tenu de la stabilité des sous espaces propres par B mise en évidence précédemment, chacune de ces matrices est alors le produit de la matrice P par une matrice formée d'un bloc carré diagonal B_i dont les colonnes sont situées aux même positions que celles de $P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{in_i}$ dans P. Plus précisément si on pose :

$$B\,P_{ik} = \sum_{q=1}^{n_i} \alpha_{i,qk}\,P_{qk}$$

Alors :

$$B_i = \begin{pmatrix} \alpha_{i,11} & \cdots & \alpha_{i,1n_i} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i,n_i1} & \cdots & \alpha_{i,n_in_i} \end{pmatrix}$$

On peut donc définir une matrice B' formée par les blocs diagonaux B_i :



Et on a :

$$B\ P = P\ B'$$

Donc :

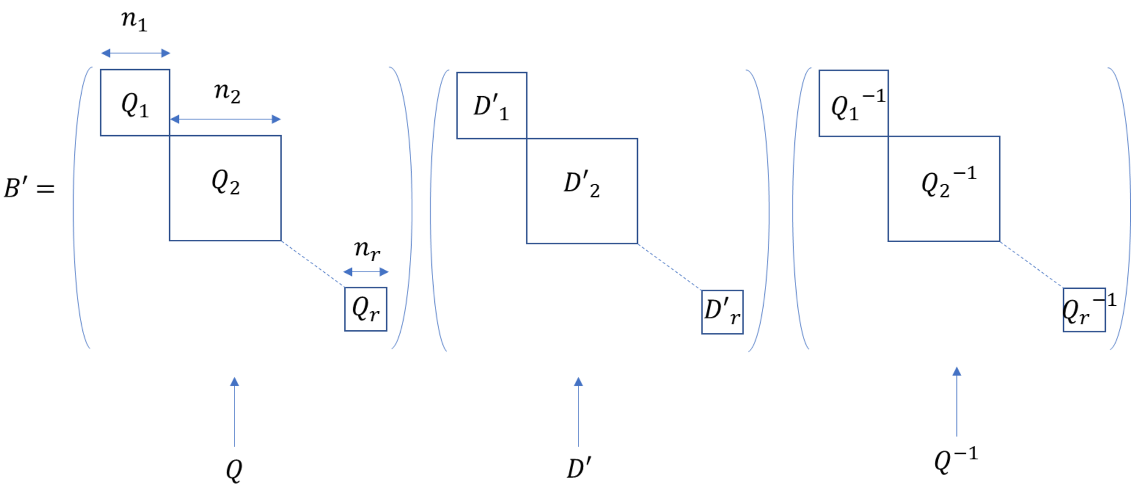
$$B = P\ B'P^{-1}$$

B et B' sont donc semblables et ont donc le même polynôme caractéristique. Or, le polynôme caractéristique de B' est le produit des polynômes caractéristiques π_{B_i} des r blocs diagonaux B_i. B étant diagonalisable, son polynôme caractéristique est scindé à racines simples donc les π_{B_i} le sont aussi et donc les B_i sont diagonalisables.

Il existe donc r matrices diagonales D'_i et r matrices inversibles Q_i telles que :

$$B_i = Q_i\ D'_i\ Q_i^{\ -1}$$

On peut alors définir la matrice Q inversible formée par les r blocs diagonaux Q_i et la matrice D' inversible formée par les r blocs diagonaux D'_i. Q est inversible et son inverse est formée des r blocs diagonaux $Q_i^{\ -1}$.



On a alors :

$$B' = Q\, D' Q^{-1}$$

Ainsi :

$$B = P\, Q\, D' Q^{-1} P^{-1} = (P\, Q)\, D'\, (P\, Q)^{-1}$$

Or la matrice D qui diagonalise A est formée de r blocs diagonaux D_i ayant sur leur diagonale une même valeur propre λ_i donc qui commutent avec les matrices Q_i et donc tels que :

$$Q_i\, D_i\, Q_i^{-1} = D_i\, Q_i\, Q_i^{-1} = D_i$$

Ainsi :

$$Q\, D\, Q^{-1} = D$$

Et :

$$A = P\, D\, P^{-1} = P\, Q\, D\, Q^{-1}\, P^{-1} = (P\, Q)\, D\, (P\, Q)^{-1}$$

Les matrices A et B sont donc diagonalisées dans la base commune de vecteurs propres formés par les colonnes de la matrice $P\, Q$

Deuxième partie : Cas d'un nombre quelconque de matrices :

Soit $\boldsymbol{n}$ matrices carrées $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ de même ordre $\boldsymbol{m}$, diagonalisables et qui commutent deux à deux, alors il existe une base commune de diagonalisation de ces matrices. Autrement dit, il existe deux matrices diagonales $\boldsymbol{D_1, D_2, \ldots, D_n}$ et une matrice inversible $\boldsymbol{R}$ telles que pour tout $\boldsymbol{1 \leq i \leq n}$:

$$\boldsymbol{A_i = R\, D_i\, R^{-1}}$$

Preuve : Par récurrence sur n

L'initialisation a déjà été faite pour $n = 2$.

Supposons donc la propriété vraie pour n matrices carrées d'ordre m diagonalisables qui commutent deux à deux. Soit alors $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ $n+1$ matrices carrées d'ordre m diagonalisables et qui commutent deux à deux.

Notons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les r valeurs propres distinctes de A_{n+1} et $n_1, n_2, \ldots, n_r$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Considérons pour chaque sous espace propre $ker(A_{n+1} - \lambda_i\, I)$ une base $\left(P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{in_i}\right)$. Alors l'union de ces bases forme une base de $\mathbb{E}$ et définit une matrice inversible P. Comme dans la démonstration précédente, les sous espaces propres de A_{n+1} sont stables par chacune des matrices $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de sorte que chacune d'elle se mette sous la forme :

$$A_i = P\, A_i' P^{-1}$$

Où les A'_i sont des matrices formées de r blocs diagonaux carrés diagonalisables de tailles successives $n_1, n_2, \ldots, n_r$ et tels que les n blocs de même position commutent entre eux deux à deux. On peut donc trouver une matrice de diagonalisation commune Q_i associée à une matrice diagonale pour les n blocs de rang i puis former une matrice inversible Q avec ces r matrices Q_i mises en blocs diagonaux ainsi qu'une matrice diagonale D'_i avec les r matrices diagonales associées. On a alors pour tout entier i de l'intervalle $[\![1, n]\!]$:

$$A_i = (P\ Q)\ D'_i (P\ Q)^{-1}$$

Notons alors D la matrice diagonale telle que :

$$A_{n+1} = P\ D\ P^{-1}$$

On a donc , en notant que Q et D commutent :

$$A_{n+1} = (P\ Q)\ D\ (P\ Q)^{-1}$$

Ceci montre que les $n+1$ matrices $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ peuvent être diagonalisées dans une base commune.