Développements limités

I Lemme de Rolle

Soit $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^2 :\ \boldsymbol{a} < b$

Si $\boldsymbol{f}$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ dérivable sur $]\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}[$ et telle que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ alors

$$\exists\ \boldsymbol{c} \in\ ]\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}[\ :\ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}$$

Preuve :

Par disjonction de cas :

1er cas : f est constante sur $[a;b]$ alors **:** $\forall\ c \in\ ]a;b[\ :\ f'(c) = 0$

2ème cas : f n'est pas constante sur $[a;b]$ alors :

$$\exists\ d \in\ ]a;b[\ :\ f(d) \neq f(a)$$

Supposons par exemple sans nuire à la généralité que : $f(d) > f(a)$

f étant continue sur $[a;b]$ elle admet une borne supérieure qu'elle atteint, donc :

$$\exists\ c \in [a;b] :\ \ \forall\ x \in [a;b] : f(x) \leq f(c)$$

en particulier :

$$f(a) < f(d) \leq f(c)$$

donc

$$c \neq a\ \ et\ \ c \neq b$$

d'où :

$$c \in\ ]a;b[$$

Ainsi f est dérivable en c, or :

$$\forall\ x \in\ ]c\ ;b[\ :\ \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Donc par passage à la limite :

$$f'(c) \leq 0$$

De même :

$$\forall\, x \in \,]a\,;c[\,:\ \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

Donc par passage à la limite :

$$f'(c) \geq 0$$

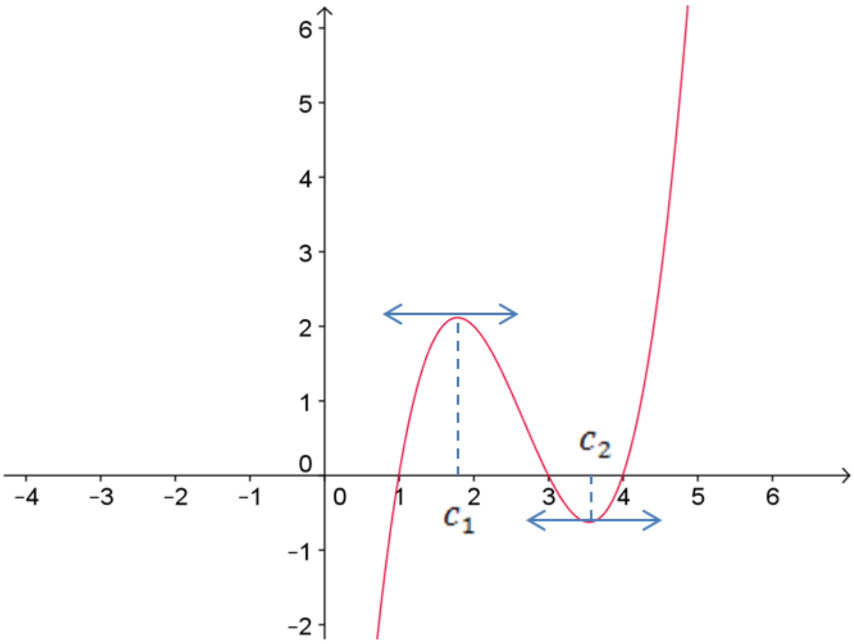
Il en résulte

$$f'(c) = 0$$

<u>Remarques</u> :

Quelques exemples graphiques pour montrer des situations où le lemme de Rolle s'applique et d'autres où il ne s'applique pas.

<u>Situation 1</u> :



f est continue sur $[1;4]$, dérivable sur $]1;4[$ et $f(1) = f(4)$ donc le lemme de Rolle s'applique

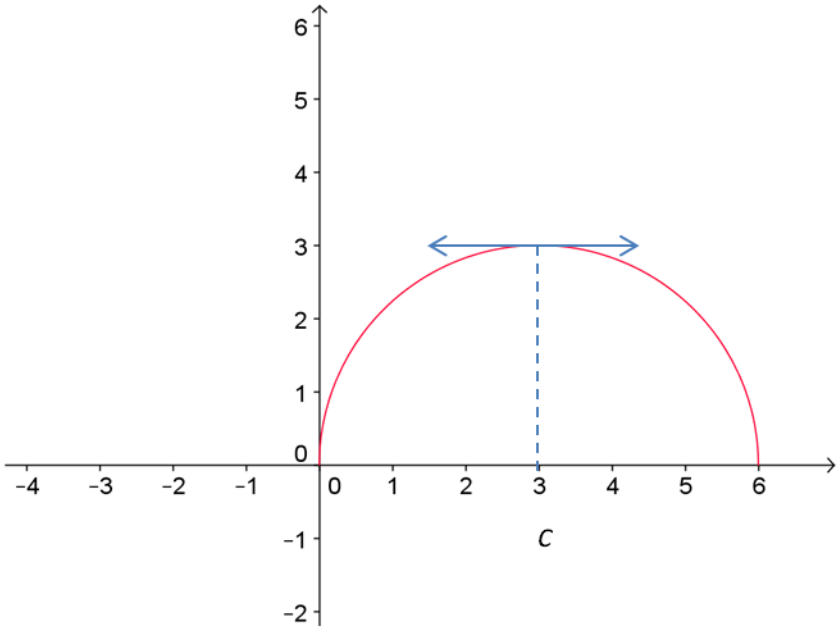
Nous voyons que f présente une tangente horizontale donc a une dérivée nulle en deux abscisses c_1 et c_2 intérieures à $[1;4]$

La fonction étant :

$$f(x) = (x-1)(x-3)(x-4)$$

Le lecteur pourra vérifier ce fait par le calcul

<u>Situation 2</u> :



f est continue sur $[0; 6]$, dérivable sur $]0; 6[$ mais ni en 0 ni en 6, et $f(0) = f(6)$ donc le lemme de Rolle s'applique

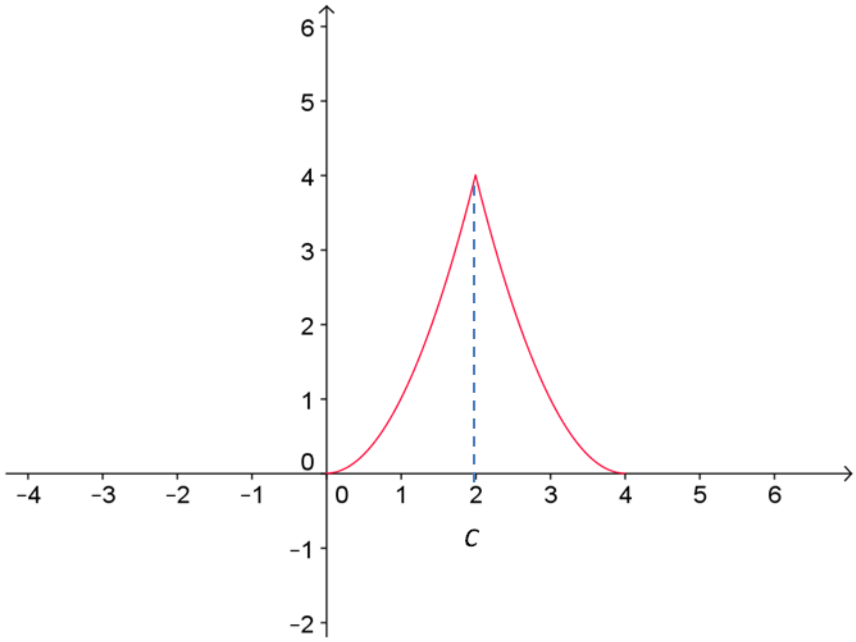
Nous voyons que f présente une tangente horizontale, donc a une dérivée nulle, en une unique abscisse c intérieure à $[0; 6]$

La fonction étant :

$$f(x) = \sqrt{9 - (x - 3)^2}$$

Le lecteur pourra vérifier ce fait par le calcul

Situation 3 :



f est continue sur $[0;4]$, dérivable sur $]0;4[$ mais non dérivable en 2, seulement à gauche et à droite, , et $f(0) = f(6)$ donc le lemme de Rolle ne s'applique pas

Nous voyons que f ne présente aucune tangente horizontale, donc a une dérivée qui ne s'annule pas, de même pour la dérivée à droite ou la dérivée à gauche

Les hypothèses du lemme de Rolle sont donc optimales

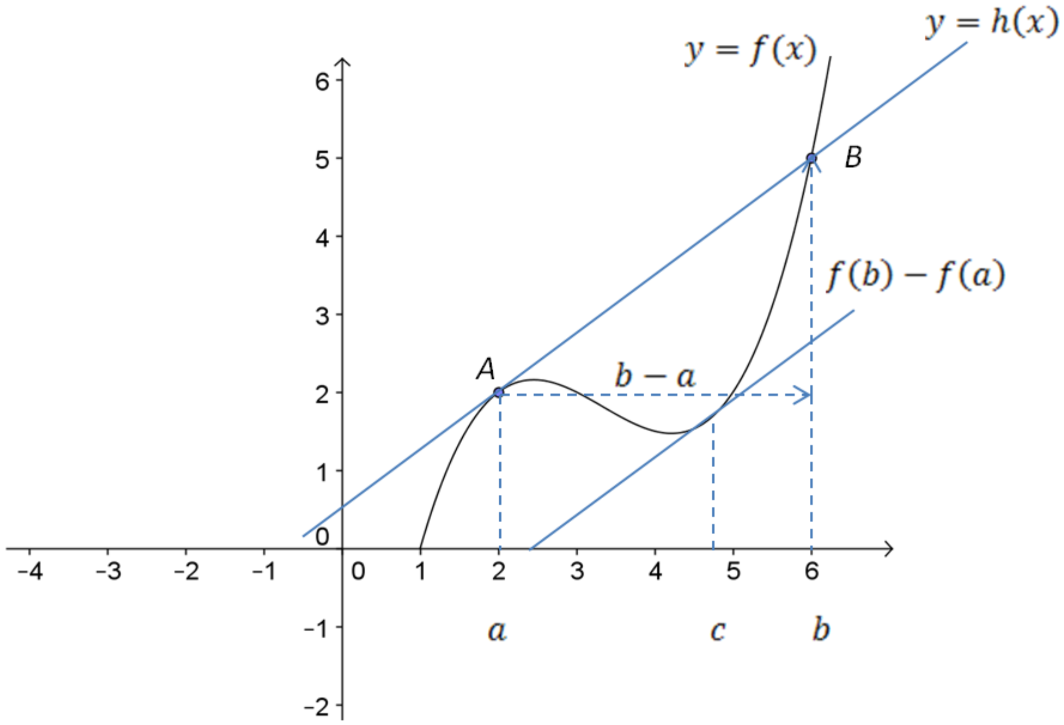
II Théorème des accroissements finis

Soit $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^2$: $\boldsymbol{a} < b$

Si $\boldsymbol{f}$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ et dérivable sur $]\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}[$ alors

$$\exists\, \boldsymbol{c} \in\,]\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}[\, : \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}} = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})$$

Preuve :



Nous allons construire une fonction g à partir de f à laquelle nous pourrons appliquer le lemme de Rolle. La méthode est simple, elle consiste à enlever à f une fonction affine qui s'annule en a et prend la valeur $f(b) - f(a)$ en b. Cette fonction affine a donc pour coefficient directeur :

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Elle a donc pour expression :

$$h(x) = m\,(x - a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)$$

La fonction g a alors pour expression :

$$g(x) = f(x) - h(x)$$

Nous avons alors :

$$g(a) = g(b) = f(a)$$

De plus, g est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Le lemme de Rolle s'applique donc et on a :

$$\exists\ c \in\ ]a; b[\ :\ g'(c) = 0$$

Or :

$$g'(x) = f'(x) - h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Il en découle :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Remarque :

Du point de vue graphique, le théorème traduit qu'il existe un point de la courbe de f en lequel la tangente est parallèle à la corde $(A\,B)$, A et B étant les points de la courbe de f d'abscisses respectives a et b.

II Caractérisation de la monotonie des fonctions sur un intervalle

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle J alors :

$$\boldsymbol{f \text{ } croissante \text{ } sur \text{ } J \iff \forall\, x \in J : \; f'(x) \geq 0}$$

$$\boldsymbol{f \text{ } décroissante \text{ } sur \text{ } J \iff \forall\, x \in J : \; f'(x) \leq 0}$$

Si f est croissante (respectivement décroissante) sur J et f'ne s'annule qu'en des points isolés alors f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur J

Preuve **:** (cas croissante uniquement, l'autre se déduit en considérant $-f$)

$(\Rightarrow)$ Supposons f croissante sur J alors :

Soit $a \in J$ et $h > 0$ tel que : $a + h \in J$ alors :

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \geq 0$$

Par passage à la limite quand h tend vers 0, on en déduit :

$$f'(a) \geq 0$$

$(\Leftarrow)$ Supposons $\forall\, x \in J : \; f'(x) \geq 0$

et supposons par l'absurde que f n'est pas croissante sur J, alors :

$$\exists\ (a, b)\ \in J^2\ :\ a < b\ \text{ et }\ f(a) > f(b)$$

Le théorème des accroissements finis donne alors :

$$\exists\ c \in\ ]a; b[\ : f(b) - f(a) = (b - a)\ f'(c)$$

donc :

$$f'(c) < 0$$

Ce qui est contradictoire

Voyons le second point : Si f est croissante et f' ne s'annule qu'en des points isolés

Supposons par l'absurde que f n'est pas strictement croissante, alors :

$$\exists\ (a, b)\ \in J^2\ :\ a < b\ \text{ et }\ f(a) = f(b)$$

or:

$$\forall\ x \in [a; b] : f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

f est donc constante sur $[a; b]$ et sa f' est donc nulle sur $[a; b]$ ce qui est contradictoire

<u>III Inégalité des acrroissements finis</u>

Soit $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^2 :\ \boldsymbol{a} < b$

Si $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, dérivables sur $]\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}[$ et telles que :

$$\forall\ \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]\ :\ |\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})| \leq \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})$$

alors

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})| \leq \boldsymbol{g}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$$

<u>Preuve</u> :

Pour tout $x \in [a; b]$ $on\ a$:

$$|f'(x)| \leq g'(x)$$

donc :

$$-g'(x) \leq f'(x) \leq g'(x)$$

Soit :

$$f'(x) - g'(x) \leq 0$$

$$f'(x) + g'(x) \geq 0$$

La fonction $f - g$ est donc décroissante sur $[a; b]$ et la fonction $f + g$ croissante. Il en découle :

$$f(a) - g(a) \geq f(b) - g(b)$$

$$f(a) + g(a) \leq f(b) + g(b)$$

Soit :

$$-(g(b) - g(a)) \leq f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a)$$

D'où l'inégalité cherchée

Remarque : Un cas particulier est celui où $g(x) = M\, x$ avec $M \geq 0$ soit $g'(x) = M$

Si

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}] \; : \; |\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})| \leq \boldsymbol{M}$$

alors

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})| \leq \boldsymbol{M}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

IV Théorème des accroissements finis généralisés

Soit $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^2 \; : \; \boldsymbol{a} < b$

Si $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ et dérivables sur $]\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}[$ et si $\boldsymbol{g}'$ ne s'annule pas sur $]\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}[$ alors :

$$\exists\, \boldsymbol{c} \in \,]\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}[\; : \; \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})} = \frac{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})}{\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{c})}$$

Preuve :

Nous allons, là encore, construire une fonction h à partir de f et de g à laquelle nous pourrons appliquer le lemme de Rolle.

Posons :

$$h(x) = f(x) - \lambda\, g(x)$$

en choisissant λ tel que :

$$h(a) = h(b)$$

soit :

$$f(a) - \lambda\, g(a) = f(b) - \lambda\, g(b)$$

Donc :

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Le lemme de Rolle s'applique à cette fonction et donne :

$$\exists\, c \in\,]a;b[\ \ \colon\ \ h'(c) = 0$$

Soit

$$f'(c) - \lambda\, g'(c) = 0$$

Donc :

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

V Développement limité – Approche du concept

Considérons une fonction comme la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(x)$$

La tangente à sa courbe en 0 nous montre que f est proche d'une fonction affine au voisinage de 0 qui est :

$$g(x) = x$$

Ce qui est à l'origine de ce fait est que f et g ont même valeur en 0 et même nombre dérivé, à savoir :

$$g(0) = f(0)$$

$$g'(0) = f'(0)$$

L'idée est alors de déterminer une fonction polynômiale de degré supérieur (2, 3, etc..) qui approcherait f au voisinage de 0.

Cherchons s'il y aurait un polynôme de degré 2 en posant :

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Tel que :

$$g(0) = f(0)$$

$$g'(0) = f'(0)$$

$$g''(0) = f''(0)$$

Ce problème conduit au système :

$$\begin{cases} a_0 = f(0) \\ a_1 = f'(0) \\ 2\,a_2 = f''(0) \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ 2\,a_2 = 0 \end{cases}$$

Autrement dit :

$$g(x) = x$$

Il n'y a donc pas de polynôme de degré deux répondant à la question. Voyons donc s'il y a un polynôme de degré 3 en posant :

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

tel que :

$$g(0) = f(0)$$

$$g'(0) = f'(0)$$

$$g''(0) = f''(0)$$

$$g'''(0) = f'''(0)$$

Ce problème conduit au système :

$$\begin{cases} a_0 = f(0) \\ a_1 = f'(0) \\ 2\,a_2 = f''(0) \\ 6\,a_3 = f'''(0) \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ 2\,a_2 = 0 \\ 6\,a_3 = -1 \end{cases}$$

Autrement dit :

$$g(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

Voyons finalement ce que cela donne avec un polynôme de degré n et et une fonction quelconque f dérivable jusqu'à l'ordre n en 0, ce qui signifie entra autre, dérivable jusqu'à l'ordre $n - 1$ sur un voisinage de 0.

Posons donc :

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

tel que :

$$g(0) = f(0)$$

$$g'(0) = f'(0)$$

$$g''(0) = f''(0)$$

$$\vdots$$

$$g^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

Ce problème conduit au système :

$$\begin{cases} a_0 = f(0) \\ a_1 = f'(0) \\ 2\ a_2 = f''(0) \\ 2 \times 3\ a_3 = f'''(0) \\ \vdots \\ 2 \times 3 \times \ldots \times n\ a_n = f^{(n)}(0) \end{cases}$$

Soit :

$$\forall\ k \in [\![0; n]\!]\ :\ a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Autrement dit :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ x^k$$

Nous voyons que pour déterminer ce polynôme, il suffit de déterminer les dérivées successives de f en 0.

Voyons ce que cela donne pour la fonction sinus :

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Donc :

Si k est pair, soit $k = 2\ p,\ \ p \in \mathbb{Z}$, alors :

$$f^{(2\,p)}(0) = \sin\left(2\,p\,\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\,p\,\pi) = 0$$

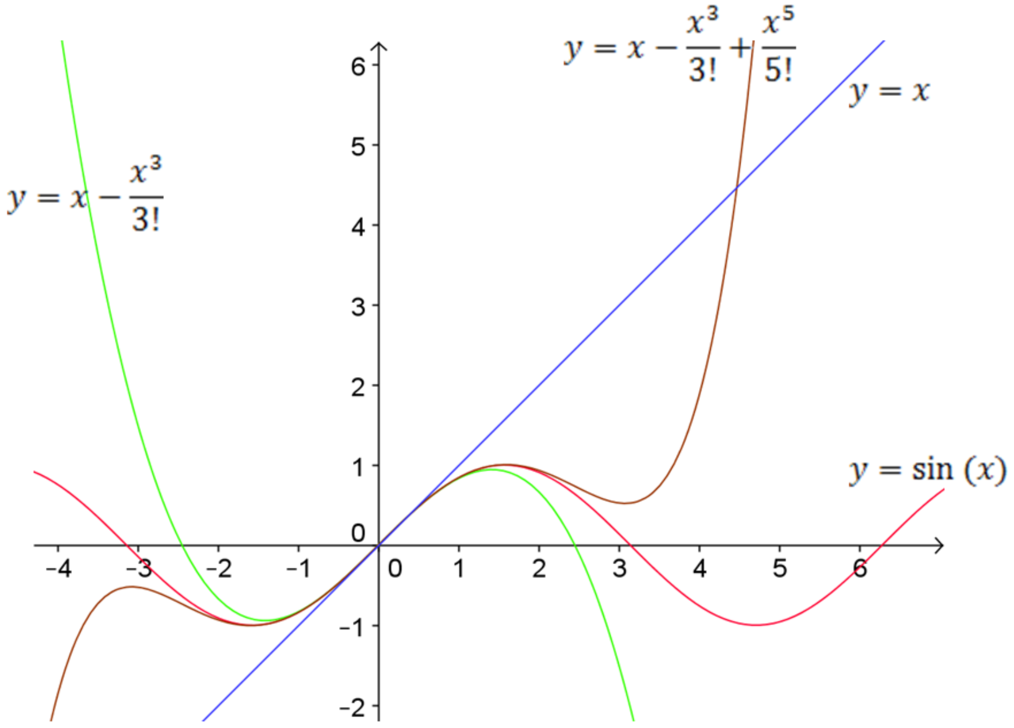
Si k est impair, soit $k = 2\,p + 1,\ \ p \in \mathbb{Z}$, alors :

$$f^{(2\,p+1)}(0) = \sin\left((2\,p+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\,p\,\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p$$

Ainsi pour $n = 2\,q + 1$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\,x^{2\,k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Le graphique ci-dessous montre la courbe de la fonction sinus ainsi que celle de ses développements limités d'ordre 1, 3 et 5 en 0



On constate que plus l'ordre du polynôme est élevé, plus la courbe de ce dernier semble se confondre avec celle de la fonction sinus sur un intervalle de plus en plus grand centré sur 0. Ce point va être confirmé par le théorème de Taylor Lagrange.

VI Développement limité de Taylor Lagrange

Soit $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{a} < b$

Si $\boldsymbol{f}$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable jusqu'à l'ordre $\boldsymbol{n}$ sur $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ et telle que $\boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{n})}$ dérivable sur $]\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}[$ alors :

$$\exists\, \boldsymbol{c} \in \,]\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}[\, :$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}) + \frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2}{\boldsymbol{2}!}\,\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{a}) + \cdots. + \frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}!}\,\boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{n})}(\boldsymbol{a}) + \frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}}}{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}!}\,\boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1})}(\boldsymbol{c})$$

Soit de façon compacte :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) = \sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{n}} \frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{k}!}\,\boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{a}) + \frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}}}{(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1})!}\,\boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1})}(\boldsymbol{c})$$

La propriété reste valable si $\boldsymbol{b} < a$

Preuve :

Nous allons là encore utiliser le lemme de Rolle sur une fonction auxiliaire définie par :

$$g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!}\,f^{(k)}(x) - \lambda\,\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où on choisit λ tel que : $g(a) = 0$

comme $g(b) = 0$ et que g est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$, le lemme de Rolle s'applique et on a :

$$\exists\, c \in \,]a;b[\, : \; g'(c) = 0$$

Or :

$$g'(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{-k\,(b-x)^{k-1}}{k!}\,f^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!}\,f^{(k+1)}(x) + \lambda\,\frac{(n+1)\,(b-x)^n}{(n+1)!}$$

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}\,f^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!}\,f^{(k+1)}(x) + \lambda\,\frac{(b-x)^n}{n!}$$

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!}\, f^{(k+1)}(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!}\, f^{(k+1)}(x) + \lambda\, \frac{(b-x)^n}{n!}$$

$$g'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!}\left(-f^{(n+1)}(x) + \lambda\right)$$

Ainsi :

$$\frac{(b-c)^n}{n!}\left(-f^{(n+1)}(c) + \lambda\right) = 0$$

Or $c \in \,]a; b[$ donc $b - c \neq 0$ d'où :

$$f^{(n+1)}(c) = \lambda$$

Donc :

$$g(a) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(x) - f^{(n+1)}(c)\, \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Il en résulte la relation cherchée.

Voyons le cas $b < a$

Il suffit de considérer la fonction :

$$g(x) = f(-x)$$

Et de lui appliquer le développement de Taylor Young sur $[-a; -b]$

$$\exists\, c \in \,]-a; -b[\, :$$

$$g(-b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-b+a)^k}{k!}\, g^{(k)}(-a) + \frac{(-b+a)^{n+1}}{(n+1)!}\, g^{(n+1)}(c)$$

Et de noter que :

$$g^{(k)}(x) = (-1)^k\, f^{(k)}(-x)$$

Ainsi :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(-c)$$

Ce qui est le résulta cherché.

<u>Application</u> : Algorithme de calcul pour la fonction sinus

Nous pouvons maintenant répondre à la question posée précédemment pour la fonction sinus :

Soit un réel quelconque x. Cette fonction f vérifie les conditions du théorème de Taylor Lagrange sur l'intervalle $[0; x]$. Or nous avons établi précédemment pour tout entier naturel k :

$$f^{(2\,k)}(0) = 0$$

$$f^{(2\,k+1)}(0) = (-1)^k$$

Nous avons donc, pour tout entier naturel p :

$$\exists\ c(x) \in\ ]0; x[$$

$$sin(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\ x^{2\,k+1} + \frac{f^{(2\,p+3)}(c(x))}{(2\,p+3)!} x^{2\,p+3}$$

Or :

$$f^{(2\,p+3)}(c(x)) = sin\left(c(x) + (2\,p+3)\frac{\pi}{2}\right)$$

Donc :

$$\left|f^{(2\,p+3)}(c(x))\right| \leq 1$$

D'où :

$$\left|\sin(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\ x^{2\,k+1}\right| \leq \frac{|x|^{2\,p+3}}{(2\,p+3)!}$$

Cela permet d'avoir un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\sin(x)$ par son développement limité d'ordre $2\,k+2$

Une conséquence pratique est une méthode de calcul de $sin(x)$ telle que celles programmées sur les calculettes.

Soit en effet à calculer pour un réel y la valeur $\sin(y)$. Il suffit de considérer le cas où $y > 0$

On commence par déterminer l'unique entier naturel m tel que :

$$-\frac{\pi}{2} < y - m\,\pi \leq \frac{\pi}{2}$$

Notons :

$$t = y - m\,\pi$$

Si $t > 0$ on pose $x = t$ et on a :

$$\sin(y) = (-1)^m \sin(t) = (-1)^m \sin(x)$$

Si $t \leq 0$ on pose $x = -t$ et on a :

$$\sin(y) = (-1)^m \sin(t) = (-1)^{m+1} \sin(x)$$

Nous sommes donc ramenés dans tous les cas au calcul de $\sin(x)$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Or sur cet intervalle, nous avons :

$$\left| \sin(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\, x^{2\,k+1} \right| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\,p+3}}{(2\,p+3)!}$$

Afin d'obtenir une précision souhaitée, de l'ordre de 10^{-13} pour une calculette, nous pouvons chercher le plus petit entier p tel que :

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\,p+3}}{(2\,p+3)!} \leq 10^{-13}$$

On trouve :

$$p = 8$$

Le polynôme utilisé pour calculer la valeur de $\sin(x)$ est donc :

$$\mathrm{P}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!} + \frac{x^{17}}{17!} - \frac{x^{19}}{19!}$$

VII Développement limité de Taylor Young- MacLaurin

Soit $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{n}) \in \mathbb{R} \times]\mathbf{0}; +\infty[\times \mathbb{N}$

Et soit $\boldsymbol{f}$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un voisinage de $\boldsymbol{a}$, c'est-à-dire une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\beta}[$

Pour $\boldsymbol{n} = \mathbf{0}$ si $\boldsymbol{f}$ est continue en $\boldsymbol{a}$, ou pour $\boldsymbol{n} \neq \mathbf{0}$ si $\boldsymbol{f}$ est dérivable jusqu'à l'ordre $\boldsymbol{n} - \mathbf{1}$ sur $]\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\beta}[$ et telle que $\boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}$ est dérivable en $\boldsymbol{a}$, il existe une fonction $\boldsymbol{\gamma}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\beta}[$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\, \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}) + \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^2}{2!}\, \boldsymbol{f}''(\boldsymbol{a}) + \cdots . + \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}!}\, \boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{n})}(\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}}\, \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x})$$

et :

$$\lim_{\mathbf{x} \to \boldsymbol{a}} \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$$

Soit de façon compacte :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{0}}^{\boldsymbol{n}} \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{k}!}\, \boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{k})}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{o}_{\boldsymbol{a}}((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}})$$

Dans le cas particulier où $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, on obtient le développement limité de MacLaurin, qui est celui auquel on se ramène le plus souvent par changement de variable :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{0}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{k}!}\, \boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{k})}(\mathbf{0}) + \boldsymbol{o}_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}})$$

Preuve :

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ en notant $P(n)$ la propriété ci-dessus.

Initialisation : $n = 0$

On suppose f continue en a. Posons :

$$\gamma(x) = f(x) - f(a)$$

La continuité de f en a donne :

$$\lim_{x \to a} \gamma(x) = \gamma(0) = 0$$

et :

$$f(x) = f(a) + (x-a)^0 \, \gamma(x)$$

Donc $P(0)$ est vraie

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie alors $P(n)$ peut s'appliquer à la fonction $g = f'$. Il existe donc une fonction γ telle que :

$$\lim_{x \to a} \gamma(x) = \gamma(0) = 0$$

et pour tout $x \in]a-\beta; a+\beta[$:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} \, g^{(k)}(a) + (x-a)^n \, \gamma(x)$$

Soit :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} \, f^{(k+1)}(a) + (x-a)^n \, \gamma(x)$$

Traduisons que γ tend vers 0 quand x tend vers a

Soit $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists \, 0 < \delta < \beta \ : \ \forall \, x \in]a-\delta; a+\delta[\ : \ |\gamma(x)| < \varepsilon$$

Introduisons alors la fonction :

$$h(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} \, f^{(k)}(a)$$

alors h est continue sur $[a-\delta; a+\delta]$, dérivable sur $]a-\delta; a+\delta[$ et sur ce dernier :

$$h'(x) = f'(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(x-a)^{k-1}}{(k-1)!} \, f^{(k)}(a) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} \, f^{(k+1)}(a)$$

Donc :

$$h'(x) = (x-a)^n \, \gamma(x)$$

Soit :

$$|h'(x)| \leq \varepsilon\, |x-a|^n$$

Fixons x dans $]a-\delta; a+\delta[$, en commençant par $x > a$ et définissons sur $[a;x]$ la fonction :

$$k(t) = \varepsilon\, \frac{(t-a)^{n+1}}{n+1}$$

h est alors continue sur $[a;x]$, dérivable sur $]a;x[$ et :

$$|h'(t)| \leq \varepsilon\, (t-a)^n$$

donc :

$$|h'(t)| \leq k'(t)$$

L'inégalité des accroissements finis donne alors :

$$|h(x) - h(a)| \leq k(x) - k(a)$$

Soit :

$$|h(x) - h(a)| \leq \varepsilon\, \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \leq \varepsilon\, (x-a)^{n+1}$$

Un travail analogue se fait pour $x < a$ en posant sur $[x;a]$

$$k(t) = -\varepsilon\, \frac{(a-t)^{n+1}}{n+1}$$

h est alors continue sur $[x;a]$, dérivable sur $]x;a[$ et :

$$|h'(t)| \leq \varepsilon\, (a-t)^n$$

donc :

$$|h'(t)| \leq k'(t)$$

L'inégalité des accroissements finis donne alors :

$$|h(a) - h(x)| \leq k(a) - k(x)$$

Soit :

$$|h(a) - h(x)| \leq \varepsilon\, \frac{(a-x)^{n+1}}{n+1} \leq \varepsilon\, (a-x)^{n+1}$$

Posons finalement sur $]a-\beta; a+\beta[$:

$$\gamma_1(x) = \frac{h(x) - h(a)}{(x-a)^{n+1}}\ si\ x \neq a\,, \qquad \gamma_1(a) = 0$$

Alors :

$$\forall\, x \in \left]a-\delta; a+\delta\right[\setminus \{a\} \;:\; |\,\gamma_1(x)| \;\leq \varepsilon$$

Donc :

$$\lim_{\mathrm{x}\to a} \gamma_1(x) = \gamma_1(0) = 0$$

Nous avons donc sur $]a-\beta; a+\beta[$

$$h(x) = h(a) + (x-a)^{n+1}\,\gamma_1(x)$$

$$f(x) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) = f(a) + (x-a)^{n+1}\,\gamma_1(x)$$

Finalement :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!}\, f^{(k)}(a) + (x-a)^{n+1}\,\gamma_1(x)$$

Donc $P(n+1)$ est vraie

VIII Développements limités en 0 des fonctions de référence

1) Fonction sinus : $\boldsymbol{f(x) = \sin(x)}$

Nous avons établi pour tout entier naturel k :

$$f^{(2\,k)}(0) = 0$$

$$f^{(2\,k+1)}(0) = (-1)^k$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\sin(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)!}\, x^{2\,k+1} + \mathrm{o}(x^{2\,p+3}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}}$$

2) **Fonction cosinus :** $\boldsymbol{f(x) = \cos(x)}$

Nous pouvons facilement établir pour tout entier naturel n :

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Et en déduire pour tout entier naturel k :

$$f^{(2\,k)}(0) = (-1)^k$$

$$f^{(2\,k+1)}(0) = 0$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\cos(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2\,k)!}\, x^{2\,k} + \mathrm{o}(x^{2\,p+2}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots}}$$

3) **Fonction tangente :** $\boldsymbol{f(x) = \tan(x)}$

Nous avons, en utilisant la propriété de composition pour dériver plus facilement :

$$f'(x) = 1 + tan^2(x) = (1 + t^2) \circ tanx$$

$$f''(x) = 2\,tan(x)\,\left(1 + tan^2(x)\right) = 2\,tan(x) + 2\,tan^3(x) = (2\,t + 2\,t^3) \circ tanx$$

$$f^{(3)}(x) = \left(2 + 6\,tan^2(x)\right)\left(1 + tan^2(x)\right) = 2 + 8\,tan^2(x) + 6\,tan^4(x)$$

$$= (2 + 8\,t^2 + 6\,t^4)\ \circ tanx$$

$$f^{(4)}(x) = \left(\,16\,tanx + 24\,tan^3(x)\right)\left(1 + tan^2(x)\right)$$

$$= 16\,tanx + 40\,tan^3(x) + 24\,tan^5(x)$$

$$= (16\,t + 40\,t^3 + 24\,t^5)\ \circ tanx$$

$$f^{(5)}(x) = \left(16\,tanx + 120\,tan^2(x) + 120\,tan^4(x)\right)\left(1 + tan^2(x)\right)$$

On pourrait continuer de proche en proche, mais nous allons nous contenter de cela. On obtient :

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(0) = 2$$

$$f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(0) = 16$$

D'où le développement limité à l'ordre 3 en 0 :

$$\tan(x) = x + \frac{2\,x^3}{3!} + \frac{16\,x^3}{5!} + o(x^6)$$

soit :

$$\boxed{\boldsymbol{\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2\,x^3}{15} + o(x^6)}}$$

Toutefois, il est possible de contourner la lourdeur des calculs, en se servant des propriétés des développements limités pour obtenir le développement de $\tan(x)$. Ce point est abordé à la fin de ce fichier.

4) <u>Fonction exponentielle</u> : $\boldsymbol{f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}}$

Nous avons pour tout entier naturel n :

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\mathrm{e}^{\mathrm{x}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots}}$$

5) <u>Fonction logarithme népérien</u> : $\boldsymbol{f(x) = \mathrm{Ln}(1 + \mathrm{x})}$

Nous avons :

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+\mathrm{x}} = (1+\mathrm{x})^{-1}$$

$$f^{(2)}(x) = -1(1+\mathrm{x})^{-2}$$

$$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)\,(1+\mathrm{x})^{-3}$$

$$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)\,(1+\mathrm{x})^{-4}$$

Et par une récurrence évidente pour tout entier naturel k non nul :

$$f^{(k)}(x) = (-1)(-2)(-3)\ldots(-(\mathrm{k}-1))\,(1+\mathrm{x})^{-\mathrm{k}}$$

Soit :

$$\boxed{\boldsymbol{f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{\mathrm{k}-1}\,(\mathrm{k}-1)!}{(1+\mathrm{x})^{\mathrm{k}}}}}$$

Ainsi :

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{\mathrm{k}-1}\,(\mathrm{k}-1)!$$

On en déduit :

$$\boxed{\boldsymbol{\mathrm{Ln}(1+\mathrm{x}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{\mathrm{k}-1}\frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\ldots}}$$

6) **<u>Fonction sinus hyperbolique</u>** : $\boldsymbol{f(x) = sh(x)}$

$$f^{(1)}(x) = ch(x)$$

$$f^{(2)}(x) = sh(x)$$

Par récurrence évidente pour tout entier naturel k :

$$f^{(2\,k)}(x) = sh(x)$$

$$f^{(2\,k+1)}(x) = ch(x)$$

Donc :

$$f^{(2\,k)}(0) = 0$$

$$f^{(2\,k+1)}(0) = 1$$

D'où :

$$\boxed{\mathbf{sh}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\boldsymbol{x}^{2\,k+1}}{(2\,k+1)!} + \mathbf{o}(\boldsymbol{x}^{2\,p+3}) = \boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{x}^3}{3!} + \frac{\boldsymbol{x}^5}{5!} + \frac{\boldsymbol{x}^7}{7!} + \cdots}$$

7) **Fonction cosinus hyperbolique** : $\boldsymbol{f(x) = ch(x)}$

$$f^{(1)}(x) = sh(x)$$

$$f^{(2)}(x) = ch(x)$$

Par récurrence évidente pour tout entier naturel k :

$$f^{(2\,k)}(x) = ch(x)$$

$$f^{(2\,k+1)}(x) = sh(x)$$

Donc :

$$f^{(2\,k)}(0) = 1$$

$$f^{(2\,k+1)}(0) = 0$$

D'où :

$$\boxed{\mathbf{ch}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\boldsymbol{x}^{2\,k}}{(2\,k)!} + \mathbf{o}(\boldsymbol{x}^{2\,p+2}) = \mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{x}^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{x}^4}{4!} + \frac{\boldsymbol{x}^6}{6!} + \cdots}$$

8) **Fonctions puissances** : $\boldsymbol{f(x) = (1 + \mathrm{x})^{\alpha}}$

Cas trivial : $\alpha = -1$:

$$\boxed{\begin{gathered}\boldsymbol{f(x) = (1 - \mathrm{x})^{-1} = \frac{1}{1 - \mathrm{x}} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1 - \mathrm{x}} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)} \\ \boldsymbol{f(x) = (1 + \mathrm{x})^{-1} = \frac{1}{1 + \mathrm{x}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\mathrm{k}} x^k + \frac{x^{n+1}}{1 - \mathrm{x}} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^{\mathrm{n}} x^n + o(x^n)}\end{gathered}}$$

Preuve :

Pour la première, c'est une conséquence de la formule :

$$(1-\mathrm{x})(1+x+x^2+\cdots+x^n)=1-x^{n+1}$$

Pour la seconde, il suffit de remplacer x par $-x$ dans la première

Cas général :

$$f^{(1)}(x)=\alpha(1+\mathrm{x})^{\alpha-1}$$

$$f^{(2)}(x)=\alpha\,(\alpha-1)(1+\mathrm{x})^{\alpha-2}$$

$$f^{(3)}(x)=\alpha\,(\alpha-1)(\alpha-2)\,(1+\mathrm{x})^{\alpha-3}$$

$$f^{(4)}(x)=\alpha\,(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\,(1+\mathrm{x})^{\alpha-4}$$

Et par une récurrence évidente pour tout entier naturel k :

$$f^{(k)}(x)=\alpha\,(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-\mathrm{k}+1)\,(1+\mathrm{x})^{\alpha-\mathrm{k}}$$

Ainsi :

$$f^{(k)}(0)=\alpha\,(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-\mathrm{k}+1)$$

On en déduit :

$$\boxed{\begin{aligned}(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{\alpha}}&=\sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}}\frac{\boldsymbol{\alpha}\,(\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1})(\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{2})(\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{3})\dots(\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{k}+\mathbf{1})}{\boldsymbol{k}!}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}+\mathbf{o}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}})\\&=\mathbf{1}+\boldsymbol{\alpha}\;\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1})}{\mathbf{2}!}\;\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\frac{\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1})(\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{2})}{\mathbf{3}!}\;\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\cdots\end{aligned}}$$

Un exemple typique est le développement limité de la fonction racine au voisinage de 0 que nous présentons à l'ordre 3 :

$$\boxed{\sqrt{\mathbf{1}+\mathbf{x}}=(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}=\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\;\boldsymbol{x}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\,\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}}\;\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}+\mathbf{o}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}})}$$

IX Opérations sur les développements limités

Toutes les propriétés développées ici concernent des développements limités en 0 mais sont extensibles à des développements limités en un point a quelconque, par changement de variable.

1) Définition

On dit qu'une fonction $\boldsymbol{f}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre $\boldsymbol{n}$ si il existe un polynôme $\boldsymbol{P}$ de degré $\boldsymbol{n}$, une fonction $\boldsymbol{\gamma}$ et un réel $\boldsymbol{\beta} > 0$ tel que :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \left]-\boldsymbol{\beta}\,;\, \boldsymbol{\beta}\right[\;:\; \boldsymbol{f(x) = P(x) + x^n\,\gamma(x)}$$

et :

$$\lim_{x \to 0} \boldsymbol{\gamma(x) = 0}$$

Autrement dit si il existe des réels $\boldsymbol{a_0, a_1, a_2}, \dots \boldsymbol{a_n}$ tels que

$$\boldsymbol{f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n\,x^n + o(x^n)}$$

Le polynôme $\boldsymbol{P(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n\,x^n}$ est appelé partie régulière d'ordre $\boldsymbol{n}$ de $\boldsymbol{f}$ en 0

Exemple :

Le développement de MacLaurin, quand il existe, est un développement limité en 0

2) Propriétés

a) Unicité du développement limité

Si $\boldsymbol{f}$ est une fonction admettant un développement limité à l'ordre $\boldsymbol{n}$ en 0, alors la partie régulière d'ordre $\boldsymbol{n}$ est unique

Preuve :

Supposons :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$$

alors par différence :

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) x + \cdots + (a_n - b_n)x^n = o(x^n)$$

En faisant tendre x vers 0 on en déduit :

$$a_0 - b_0 = 0$$

Puis en divisant par x et en le faisant tendre vers 0 :

$$a_1 - b_1 = 0$$

Et ainsi de suite… (mais pour être bien rigoureux il faudrait faire une récurrence plutôt évidente) jusqu'à :

$$a_n - b_n = 0$$

b) Somme :

Si f et g sont deux fonctions admettant chacune un développement limité à l'ordre n en 0, alors leur somme $f + g$ admet également un développement limité à l'ordre n en 0, et la partie régulière de $f + g$ d'ordre n est la somme des parties régulières d'ordre n de f et de g

Plus précisément :

Si :

$$\boldsymbol{f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)}$$

$$\boldsymbol{g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + o(x^n)}$$

alors :

$$\boldsymbol{f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + o(x^n)}$$

c) **<u>Produit par une constante c</u>** :

Si :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

alors **:**

$$c\, f(x) = c\, a_0 + c\, a_1 x + c\, a_2 x^2 + \cdots + c\, a_n x^n + o(x^n)$$

d) <u>Produit de deux fonctions</u>

Si f et g sont deux fonctions admettant chacune un développement limité à l'ordre n en 0, alors leur produit $f \times g$ admet également un développement limité à l'ordre n en 0 et la partie régulière d'ordre n de $f \times g$ est la troncature à l'ordre n du produit des parties régulières d'ordre n de f et de g

Plus précisément :

Si :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$$

alors :

$$f(x) \times g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + o(x^n)$$

avec :

$$\forall\, k \in [\![0; n]\!] \;\; : \;\; c_k = \sum_{q=0}^{k} a_q\, b_{k-q}$$

<u>Plus généralement :</u>

Si les deux fonctions ont des développements limités à des ordres différents et que ces développements sont de la forme :

$$\boldsymbol{f(x) = a_p\, x^p + \ a_{p+1}\, x^{p+1} + \cdots + a_n\, x^n + o(x^n)}$$

$$\boldsymbol{g(x) = b_q\, x^q + \ b_{q+1}\, x^{q+1} + \cdots + b_m\, x^m + o(x^m)}$$

alors le produit a un développement limité d'ordre le plus petit des deux nombres $\boldsymbol{p+m}$ et $\boldsymbol{q+n}$

<u>Preuve</u> **:**

Posons :

$$A(x) = a_p\, x^p + \ a_{p+1}\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n$$

$$B(x) = b_q\, x^q + \ b_{q+1}\, x^{q+1} + \cdots + b_m\, x^m$$

Alors :

$$f(x) \times g(x) = \big(A(x) + o(x^n)\big)\,\big(B(x) + o(x^m)\big)$$

$$f(x) \times g(x) = A(x)\, B(x) + \ A(x)\, o(x^m) + \ B(x)\, o(x^n) + o(x^{n+m})$$

$$f(x) \times g(x) = A(x)\, B(x) + o(x^{m+p}) + \ o(x^{n+q}) + o(x^{n+m})$$

En notant :

$$s = Min\,(m+p, n+q)$$

$T_s[A(x)\, B(x)]$ la troncature du polynôme $A(x)\, B(x)$ à l'ordre s

On a :

$$f(x) \times g(x) = T_s[A(x)\, B(x)] + o(x^s)$$

Et le terme c_k d'ordre k de $T_s[A(x)\, B(x)]$ est donnée par, quitte à rajouter des coefficients nuls :

$$c_k \ = \sum_{q=0}^{k} a_q\, b_{k-q}$$

<u>**Exemple pratique**</u> :

$$f(x) = \ x - \ 2\, x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$g(x) = 1 + \ x - \ x^4 + o(x^4)$$

Le produit donne un développement limité d'ordre 3, obtenu par troncature à l'ordre 3 du produit :

$$(x - \ 2\, x^2 + x^3)\,(1 + \ x - \ x^4) = x + x^2 - 2\, x^2 - 2\, x^3 + x^3 + o(x^3)$$

$$= x - x^2 - x^3 + o(x^3)$$

D'où :

$$f(x) \times g(x) = x - x^2 - x^3 + o(x^3)$$

e) <u>Inverse d'une fonction</u>

Si f est une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0 de terme constant non nul, alors son inverse $1/f$ admet également un développement limité à l'ordre n en 0 et sa partie régulière d'ordre n est telle que la troncature d'ordre n de son produit par la partie régulière d'ordre n de f soit égale à 1.

Plus précisément :

Si :

$$\boldsymbol{f(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n + o(x^n)}$$

alors

$$\boldsymbol{\frac{1}{f(x)} = b_0 + b_1\, x + b_2\, x^2 + \cdots + b_n\, x^n + o(x^n)}$$

où $b_0, b_1, b_2, \dots b_n$ sont les solutions du système :

$$\boldsymbol{\begin{cases} a_0\, b_0 = 1 \\ a_0\, b_1 + a_1\, b_0 = 0 \\ a_0\, b_2 + a_1\, b_1 + a_2\, b_0 = 0 \\ \vdots \\ a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + a_2\, b_{n-2} + \cdots + a_n\, b_0 = 0 \end{cases}}$$

<u>Preuve</u> :

Le système précédent admet une solution unique et se résout facilement de haut en bas de proche en proche, selon ce procédé :

$$\begin{cases} b_0 = \dfrac{1}{a_0} \\ b_1 = -\dfrac{a_1}{a_0}\, b_0 \\ b_2 = -\dfrac{a_1}{a_0}\, b_1 - \dfrac{a_2}{a_0}\, b_0 \\ \vdots \\ b_n = -\dfrac{a_1}{a_0}\, b_{n-1} - \dfrac{a_2}{a_0}\, b_{n-2} - \cdots \dfrac{a_n}{a_0}\, b_0 \end{cases}$$

On a alors :

$$(a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n)\,(b_0 + b_1\, x + b_2\, x^2 + \cdots + b_n\, x^n) = 1 + x^{n+1} R(x)$$

R étant un polynôme

Notons :

$$f(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n + x^n\, \gamma(x)$$

$$A(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n$$

$$B(x) = b_0 + b_1\, x + b_2\, x^2 + \cdots + b_n\, x^n$$

avec :

$$\lim_{\mathrm{x}\to 0} \gamma(x) = 0$$

alors :

$$f(x)\, B(x) = (A(x) + x^n\, \gamma(x))\, B(x) = A(x)\, B(x) + x^n\, \gamma(x) B(x)$$

$$f(x)\, B(x) = 1 + x^{n+1} R(x) + x^n\, \gamma(x) B(x)$$

$$f(x)\, B(x) = 1 + x^n (x\, R(x) + \gamma(x) B(x))$$

Donc en posant :

$$\gamma_1(x) = x\, R(x) + \gamma(x) B(x)$$

On a :

$$f(x)\, B(x) = 1 + x^n\, \gamma_1(x)$$

avec :

$$\lim_{\mathrm{x}\to 0} \gamma_1(x) = 0$$

Il vient alors :

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{B(x)}{1 + x^n \gamma_1(x)}$$

or

$$\frac{B(x)}{1 + x^n \gamma_1(x)} - B(x) = \frac{-x^n \gamma_1(x) B(x)}{1 + x^n \gamma_1(x)} = o(x^n)$$

Donc :

$$\frac{1}{f(x)} = B(x) + o(x^n)$$

D'où :

$$\frac{1}{f(x)} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$$

<u>Exemple pratique</u>:

Développement limité en 0 de :

$$h(x) = \frac{1}{2 + x + x^2 + o(x^2)}$$

On cherche un polynôme $B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ tel que :

$$(2 + x + x^2)\,(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = 1 + o(x^2)$$

Le développement et l'identification conduit au système :

$$\begin{cases} 2\,b_0 = 1 \\ 2\,b_1 + b_0 = 0 \\ 2\,b_2 + b_1 + b_0 = 0 \end{cases}$$

La résolution donne :

$$\begin{cases} b_0 = \dfrac{1}{2} \\ b_1 = -\dfrac{1}{4} \\ b_2 = -\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2 + x + x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\,x - \frac{1}{8}\,x^2 + o(x^2)$$

Une autre méthode consiste à utiliser la propriété de la composée de fonction, décrite ci-après, mais elle n'a pas notre préférence, bien qu'étant couramment employée. Une autre méthode fait référence au principe de la division selon les puissances croissantes des polynômes.

f) Composée de deux fonctions

Si f et g sont deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en 0 et $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ alors la composée $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 et sa partie régulière d'ordre n est la troncature à l'ordre n de la composée de la partie régulière d'ordre n de f avec la partie régulière d'ordre n de g

Plus précisément :

Si

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n) = A(x) + o(x^n)$$

$$g(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + o(x^n) = B(x) + o(x^n)$$

alors :

$$f\big(g(x)\big) = T_n[A(B(x))] + o(x^n)$$

où $T_n[A(B(x))]$ est la troncature à l'ordre n du polynôme composé $A(B(x))$

<u>Preuve</u> :

Posons :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \gamma(x) = A(x) + x^n \gamma(x)$$

avec :

$$\lim_{x\to 0} \gamma(x) = 0$$

alors :

$$f\big(g(x)\big) = A(B(x)) + (B(x))^n \gamma(B(x))$$

Notons alors que :

$$A(B(x)) = T_n[A(B(x))] + o(x^n)$$

$$(B(x))^n = (b_1\, x + \; b_2\, x^2 + \cdots + b_n\, x^n)^n = o(x^n)$$

$$\lim_{x\to 0} \gamma(B(x)) = 0$$

Ainsi :

$$f\big(g(x)\big) = T_n[A(B(x))] + o(x^n)$$

<u>Exemple pratique</u> :

Reprenons l'exemple précédent :

$$h(x) = \frac{1}{2 + x + x^2 + o(x^2)}$$

et modifions le ainsi :

$$h(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+t}$$

Nous avons donc la composée de deux fonctions :

$$f(t) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+t} = \frac{1}{2}\left(1 - t + t^2 + o(t^2)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, t + \frac{1}{2}\, t^2 + o(t^2)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Déterminons la composée des développements limités :

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, t + \frac{1}{2}\, t^2\right) \circ \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\right)^2$$

Puis sa troncature à l'ordre 2 :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\, x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\, x - \frac{1}{8}\, x^2$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2 + x + x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\, x - \frac{1}{8}\, x^2 + o(x^2)$$

Nous retrouvons bien heureusement le même résultat qu'avec la méthode précédente que nous jugeons plus courte, mais au lecteur de se faire son opinion.

g) <u>Primitive d'une fonction</u> : $F'(x) = f(x)$

Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0 et si F est une primitive de f au voisinage de 0, alors F admet un développement limité à l'ordre n en 0 et sa partie régulière d'ordre n est la primitive de la partie régulière d'ordre n de f qui prend la valeur $F(0)$ en 0

Plus précisément :

Si :

$$\boldsymbol{f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)}$$

Alors :

$$\boldsymbol{F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1})}$$

<u>Preuve</u> **:**

Notons ce préliminaire déjà démontré dans la preuve du théorème de Taylor Young

Si h est une fonction dérivable sur un voisinage de 0 et si $h'(x) = o(x^n)$ alors

$$h(x) - h(0) = o(x^{n+1})$$

Appliquons le préliminaire à la fonction :

$$h(x) = F(x) - \left(a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\right)$$

Nous avons :

$$h'(x) = f(x) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) = o(x^n)$$

Donc

$$h(x) - h(0) = o(x^{n+1})$$

$$F(x) - \left(a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^n\right) - F(0) = o(x^{n+1})$$

d'où la relation cherchée.

X Développements limités de réciproques usuelles

1) Fonction arcsinus : $\boldsymbol{f(x) = sin^{-1}(x)}$

Il suffit de noter que :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Nous allons donc appliquer la propriété des composées en considérant :

$$g(t) = (1 + t)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\, t + \frac{3}{8}\, t^2 + \mathrm{o}(t^3)$$

$$f'(x) = g(-x^2) = 1 + \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{3}{8}\, x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$

Il reste à appliquer la propriété de la primitive :

$$\boxed{\boldsymbol{sin^{-1}(x) = x + \frac{1}{6}\, x^3 + \frac{3}{40}\, x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right)}}$$

Nous n'avons donné qu'un développement à l'ordre 5 mais on peut bien sûr développer à n'importe quel ordre.

2) Fonction arccosinus : $\boldsymbol{f(x) = cos^{-1}(x)}$

Il suffit de noter que :

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Et donc sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - sin^{-1}(x)$$

On en déduit :

$$\boxed{\boldsymbol{cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}\, x^3 - \frac{3}{40}\, x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right)}}$$

3) **<u>Fonction Arctangente</u>** : $\boldsymbol{f(x) = tan^{-1}(x)}$

Il suffit de noter que :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

Puis d'en déduire par primitive :

$$\boxed{\boldsymbol{tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2\,n+1} + o(x^{2n+1})}}$$

4) **<u>Fonction Argument sinus hyperbolique</u>** : $\boldsymbol{f(x) = sh^{-1}(x)}$

Il suffit de noter que :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

C'est donc l'analogue du développement de $sin^{-1}(x)$. Cela donne :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{3}{8}\, x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$

Puis :

$$\boxed{\boldsymbol{sh^{-1}(x) = x - \frac{1}{6}\, x^3 + \frac{3}{40}\, x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right)}}$$

1) **<u>Fonction Argument tangente hyperbolique</u>** : $\boldsymbol{f(x) = th^{-1}(x)}$

Il suffit de noter que :

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n})$$

Puis d'en déduire par primitive :

$$\boldsymbol{th^{-1}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2\,n+1} + o(x^{2n+1})}$$

X Astuces pour déterminer un développement limité

1) Propriétés de parité

Si $\boldsymbol{f}$ est définie sur un intervalle $]-\boldsymbol{\beta}\ ;\ \boldsymbol{\beta}[\ ,\boldsymbol{\beta} > 0$ et si elle admet un développement limité à l'ordre $\boldsymbol{n}$ en 0 alors :

Si $\boldsymbol{f}$ est paire, sa partie régulière d'ordre $\boldsymbol{n}$ est paire et si $\boldsymbol{f}$ est impaire, sa partie régulière d'ordre $\boldsymbol{n}$ est impaire

Preuve :

Posons :

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n\,x^n + o(x^n)$$

alors

$$f(-x) = a_0 - a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + (-1)^n a_n\,x^n + o((-x)^n)$$

$$= a_0 - a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + (-1)^n a_n\,x^n + o(x^n)$$

Si f est paire on a sur $]-\beta\ ;\ \beta[$:

$$f(-x) = f(x)$$

et par unicité du développement limité :

$$a_0 - a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + (-1)^n a_n\,x^n = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n\,x^n$$

On en déduit, par identification, que tous les coefficients des puissances impaires sont nuls

Si f est impaire on a sur $]-\beta\ ;\ \beta[$:

$$f(-x) = -f(x)$$

et par unicité du développement limité :

$$a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + (-1)^n a_n x^n = -(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)$$

On en déduit, par identification, que tous les coefficients des puissances paires sont nuls

2) Equation différentielle vérifiée par la fonction

Il n'est pas toujours aisé de calculer les dérivées successives d'une fonction. Nous avons vu combien cet exercice était laborieux pour une fonction telle que $\tan(x)$. Une astuce permettant de s'en sortir élégamment consiste à déterminer une équation différentielle vérifiée par la fonction dont on cherche le développement limité. C'est la recette déjà utilisée pour déterminer les développements limités de réciproques de fonctions circulaires. En effet, la fonction $f(x) = \sin^{-1}(x)$ est solution de l'équation différentielle :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Revenons à la fonction tangente : $f(x) = \tan(x)$. Elle vérifie :

$$f'(x) = 1 + (f(x))^2$$

$f'(0)$ est facile à calculer et vaut 1, donc le coefficient du terme d'ordre 1 dans le développement de f est donc $a_1 = 1$

f' admettant un développement limité à l'ordre 7, nous avons, par le théorème de la primitive :

$$f(x) = x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + o(x^8)$$

$$f'(x) = 1 + 3 a_3 x^2 + 5 a_5 x^4 + 7 a_7 x^6 + o(x^7)$$

On en déduit :

$$1 + \left(f(x)\right)^2 = 1 + x^2 + 2 a_3 x^4 + (2 a_5 + {a_3}^2) x^6 + o(x^6)$$

En identifiant ce dernier développement avec celui de $f'(x)$ il vient :

$$\begin{cases} 3 a_3 = 1 \\ 5 a_5 = 2 a_3 \\ 7 a_7 = 2 a_5 + {a_3}^2 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} a_3 = \dfrac{1}{3} \\ a_5 = \dfrac{2}{15} \\ a_7 = \dfrac{1}{7}\left(\dfrac{2}{15} + \dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{1}{7} \times \dfrac{17}{45} = \dfrac{17}{315} \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{\tan(x) = x + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}\,x^7 + o(x^8)}$$