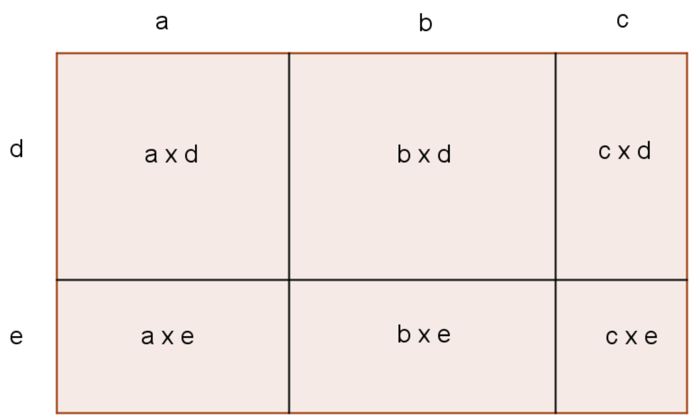
Développement

Une manière efficace d'exécuter un développement est de l'apparenter à son interprétation géométrique en termes de calcul d'aires.

Soit en effet un rectangle de longueur dans une unité quelconque, le centimètre par exemple, $a + b + c$ et de largeur $d + e$, où a, b, c, d, e sont des nombres strictement positifs quelconque.



L'aire de ce rectangle peut alors se calculer de deux façons. La première, en multipliant sa longueur $(a + b + c)$ par sa largeur $(d + e)$:

$$\boxed{(a + b + c) \times (d + e)}$$

la deuxième, en décomposant le rectangle en six parties :

$$\boxed{(a \times d) + (a \times e) + (b \times d) + (b \times e) + (c \times d) + (c \times e)}$$

ce qui conduit à la formule dite de développement, valable aussi bien pour des nombres relatifs, et où les signes $\times$ ont été omis ainsi que les parenthèses autour des produits :

$$\boxed{(a + b + c)(d + e) = a\,d + a\,e + b\,d + b\,e + c\,d + c\,e}$$

Cette formule peut s'étendre à un nombre quelconque de termes dans chacune des deux parenthèses.

Appliquons ce principe au développement du produit suivant (4 termes dans la parenthèse de gauche, 3 dans celle de droite) :

$$(x^3 + 2\,x^2 - 5\,x + 7)(3\,x^2 - 6\,x + 1)$$

Mais à la différence de la méthode enseignée de façon classique dans le cadre scolaire, disposons le calcul dans des cellules rectangulaires, à l'image de l'interprétation géométrique précédente :

Produit	x^3	$2\,x^2$	$-5\,x$	7
$3\,x^2$	$3\,x^5$	$6\,x^4$	$-15\,x^3$	$21\,x^2$
$-6\,x$	$-6\,x^4$	$-12\,x^3$	$30\,x^2$	$-42x$
1	x^3	$2\,x^2$	$-5\,x$	7

Les cellules en jaunes contiennent les 4 termes de la parenthèse de gauche, on les considère comme déterminant la longueur d'un rectangle.

Les cellules en vertes contiennent les 3 termes de la parenthèse de droite, on les considère comme déterminant la largeur de ce rectangle.

Les cellules en rose contiennent alors les différents produits (12 au total) s'apparentant aux aires des petits rectangles décomposant le rectangle initial.

Pour obtenir le développement, il suffit alors d'additionner les 12 cellules roses du tableau, et cela de manière diagonale. On obtient ainsi directement et en minimisant le risque d'erreur le développement suivant :

$$3\,x^5 - 26\,x^3 + 53\,x^2 - 47\,x + 7$$

Le grand avantage de ce genre de disposition en tableau s'illustre également dans des produits du type :

$$\left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3} + 5\,\sqrt{6}\right)\left(3 - 4\,\sqrt{2} + 7\,\sqrt{3}\right)$$

Produit	1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	$5\sqrt{6}$
3	3	$3\sqrt{2}$	$-3\sqrt{3}$	$15\sqrt{6}$
$-4\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$	-8	$4\sqrt{6}$	$-40\sqrt{3}$
$7\sqrt{3}$	$7\sqrt{3}$	$7\sqrt{6}$	-21	$105\sqrt{2}$

Le contrôle des erreurs de calcul est alors aisé car vous noterez qu'on retrouve le même type de racines dans les diagonales montantes. Il est alors aisé d'additionner les termes de ce tableau en additionnant les termes contenant les mêmes racines, par lecture diagonale.

Le résultat est :

$$\boxed{-26 + 104\sqrt{2} - 36\sqrt{3} + 26\sqrt{6}}$$