Déterminant d'une matrice

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif tel que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\mathbb{E} = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des colonnes à n éléments de $\mathbb{K}$.

1) Forme $n -$ linéaire alternée

Soit f une application de $\mathbb{E}^n$ dans $\mathbb{K}$. On dit que f est une **forme n −linéaire sur** $\mathbb{E}$ si f est linéaire par rapport à chacune de ses variables, soit :

$$\forall\ (X_1, X_2, .., X_n) \in \mathbb{E}^n\ \forall\ \alpha\ \in \mathbb{K}\ \forall\ i \in \{1, \dots, n\}\ \forall\ Y_i\ \in \mathbb{E} :$$

$$f(X_1, X_2, .., X_i + Y_i, \dots X_n) = f(X_1, X_2, .., X_i, \dots X_n) + f(X_1, X_2, .., Y_i, \dots X_n)$$

$$f(X_1, X_2, .., \alpha\, X_i, \dots X_n) = \alpha\, f(X_1, X_2, .., X_i, \dots X_n)$$

Une forme f n −linéaire sur $\mathbb{E}$ est dite **alternée** si :

$$\exists\ (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 : i \neq j\ , X_i = X_j \Rightarrow\ f(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$$

Autrement dit f s'annule lorsque deux colonnes sont égales.

2) Propriété d'antisymétrie d'une forme $n -$ linéaire alternée

Une forme f n −linéaire alternée sur $\mathbb{E}$ est **antisymétrique**, c'est-à-dire :

$$\forall\ (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 : i \neq j\ \Rightarrow\ f\big(X_1, X_2, \dots X_i, \dots, X_j, \dots X_n\big) = -f\big(X_1, X_2, \dots X_j, \dots, X_i, \dots X_n\big)$$

Autrement dit, en échangeant deux colonnes, l'image est changée en son opposée.

Preuve :

On a par le caractère alterné :

$$f\big(X_1, X_2, \dots X_i + X_j, \dots, X_i + X_j, \dots X_n\big) = 0$$

Soit, en développant par linéarité :

$$f(X_1, X_2, \dots X_i, \dots, X_i, \dots X_n) + f\left(X_1, X_2, \dots X_i, \dots, X_j, \dots X_n\right)$$

$$+f\left(X_1, X_2, \dots X_j, \dots, X_i, \dots X_n\right) + f\left(X_1, X_2, \dots X_j, \dots, X_j, \dots X_n\right) = 0$$

A nouveau par le caractère alterné :

$$f\left(X_1, X_2, \dots X_i, \dots, X_j, \dots X_n\right) + f\left(X_1, X_2, \dots X_j, \dots, X_j, \dots X_n\right) = 0$$

d'où le résultat.

Remarque : réciproquement si f est une forme $n-$ linéaire antisymétrique alors elle est alternée

Preuve :

Raisonnons avec les deux premières variables, le même raisonnement se faisant avec n'importe quel couple de variables. Par antisymétrie, nous avons :

$$f(X_1, X_1 + X_2, \dots, X_n) + f(X_1 + X_2, X_1, \dots, X_n) = 0$$

Puis par linéarité :

$$f(X_1, X_1, \dots, X_n) + f(X_1, X_2, \dots, X_n) + f(X_1, X_1, \dots, X_n) + f(X_2, X_1, \dots, X_n) = 0$$

Soit :

$$2\, f(X_1, X_1, \dots, X_n) = 0$$

Si le corps est de caractéristique différente de 2, ce qui est le cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors :

$$f(X_1, X_1, \dots, X_n) = 0$$

2) Développement canonique d'une forme $n-$ linéaire alternée-Déterminant

Introduisons la base canonique $(E_1, E_2 \dots, E_n)$ de $\mathbb{E}$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et notons pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$$

de telle sorte que l'on a :

$$X_j = x_{1j}\, E_1 + x_{2j}\, E_2 + \cdots + x_{nj}\, E_n = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\, E_i$$

On a alors, en développant par linéarité (voir l'exercice à ce sujet) et en simplifiant par caractère alterné :

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\, E_i\,, \sum_{i=1}^{n} x_{i2}\, E_i\,, \dots, \sum_{i=1}^{n} x_{in}\, E_i\right)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)1}\, x_{\sigma(2)2} \dots x_{\sigma(n)n}\, f\big(E_{\sigma(1)}, E_{\sigma(2)}, \dots, E_{\sigma(n)}\big)$$

où S_n désigne l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ qui sont au nombre de n !

Or toute permutation σ de S_n peut être décomposée en un certain nombre de transpositions $T(\sigma)$ qui ne font que permuter deux éléments de $\{1, \dots, n\}$. Nous le noterons $T(\sigma)$. Nous avons alors par antisymétrie :

$$f\big(E_{\sigma(1)}, E_{\sigma(2)}, \dots, E_{\sigma(n)}\big) = (-1)^{T(\sigma).}\, f(E_1, E_2, \dots, E_n)$$

On appelle alors **signature de $\boldsymbol{\sigma}$** le nombre :

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{T(\sigma).}$$

Ainsi :

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1)1}\, x_{\sigma(2)2} \dots x_{\sigma(n)n}\right) f(E_1, E_2, \dots, E_n)$$

On définit alors le déterminant des n colonnes $X_1, X_2, \dots, X_n$ par :

$$\boxed{\boldsymbol{det(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1)1}\, x_{\sigma(2)2} \dots x_{\sigma(n)n}}}$$

Toute forme n −linéaire alternée sur $\mathbb{E}$ est donc proportionnelle au déterminant

De plus le déterminant est une forme n −linéaire alternée sur $\mathbb{E}$

<u>Preuve</u> :

1) Caractère antisymétrique du déterminant

On a :

$$\forall\ (X_1, X_2, .., X_n) \in \mathbb{E}^n:$$

$$det(X_2, X_1, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1)2}\, x_{\sigma(2)1} \dots x_{\sigma(n)n}$$

Notons τ_{12} la transposition de S_n qui échange 1 et 2 , c'est-à-dire telle que :

$$\forall\ i \in \{3, \dots, n\} : \tau_{12}(i) = i\,, \qquad \tau_{12}(1) = 2, \qquad \tau_{12}(2) = 1$$

Considérons alors l'application φ suivante :

$$\varphi : \quad S_n \to S_n$$

$$\sigma \to \sigma \circ \tau_{12}$$

Montrons que φ est injective :

$$\varphi(\sigma) = \varphi(\sigma') \Rightarrow \sigma \circ \tau_{12} = \sigma' \circ \tau_{12}$$

$$\Rightarrow (\sigma \circ \tau_{12}) \circ \tau_{21} = (\sigma' \circ \tau_{12}) \circ \tau_{21}$$

$$\Rightarrow \sigma \circ (\tau_{12} \circ \tau_{21}) = \sigma' \circ (\tau_{12} \circ \tau_{21})$$

$$\Rightarrow \sigma \circ Id = \sigma' \circ Id$$

$$\Rightarrow \sigma = \sigma'$$

φ est donc bien injective et comme S_n a un nombre fini d'éléments, elle est bijective. Ainsi :

$$det(X_2, X_1, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma \circ \tau_{12})\, x_{\sigma\circ\tau_{12}(1)2}\, x_{\sigma\circ\tau_{12}(2)1} \dots x_{\sigma\circ\tau_{12}(n)n}$$

Or :

$$\varepsilon(\sigma \circ \tau_{12}) = (-1)^{T(\sigma)+1} = -\,\varepsilon(\sigma)$$

$$\sigma \circ \tau_{12}(1) = \sigma\big(\tau_{12}(1)\big) = \sigma(2)$$

$$\sigma \circ \tau_{12}(2) = \sigma\big(\tau_{12}(2)\big) = \sigma(1)$$

$$\forall\, i \in \{3, \dots, n\} : \ \sigma \circ \tau_{12}(i) = \sigma\big(\tau_{12}(i)\big) = \sigma(i)$$

Donc :

$$det(X_2, X_1, \dots, X_n) = -\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(2)2}\, x_{\sigma(1)1} \dots x_{\sigma(n)n} \ = -\,det(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Le déterminant est donc changé en son opposé par permutation des deux premières colonnes. Il en est de même par permutation de deux colonnes quelconques i et j par un raisonnement identique utilisant la transposition τ_{ij} à la place de τ_{12}

2) Caractère $n-$ linéaire du déterminant

On a :

$$\forall\ (X_1, Y_1, X_2, .., X_n, \alpha) \in \mathbb{E}^{n+1} \times \mathbb{K}:$$

$$det(X_1 + Y_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, \big(x_{\sigma(1)1} + y_{\sigma(1)1}\big)\, x_{\sigma(2)2} \dots x_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1)1}\, x_{\sigma(2)2} \dots x_{\sigma(n)n} \ + \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, y_{\sigma(1)1}\, x_{\sigma(2)2} \dots x_{\sigma(n)n}$$

$$= det(X_1, X_2, \dots, X_n) + det(Y_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$det(\alpha\, X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, \big(\alpha\, x_{\sigma(1)1}\big)\, x_{\sigma(2)2} \dots x_{\sigma(n)n}$$

$$= \alpha \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1)1}\, x_{\sigma(2)2} \dots x_{\sigma(n)n}$$

$$= \alpha\, det(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Le déterminant est donc linéaire par rapport à sa première colonne variable. Il l'est également par rapport à n'importe quelle colonne variable par un raisonnement identique. C'est donc bien une forme n −linéaire

3) <u>Déterminant d'une matrice carrée</u>

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Désignons par $A_1, A_2, \dots, A_n$ ses vecteurs colonnes. On définit alors le déterminant de A par :

$$det(A) = det(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

Autrement dit le déterminant d'une matrice carrée est le déterminant de ses vecteurs colonnes.

4) <u>Propriétés du déterminant d'une matrice</u>

Considérons l'application f de $\mathbb{E}^n$ dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$f(X_1, X_2, .., X_n) = \det(A\, X_1, A\, X_2, .., A\, X_n)$$

Il est facile de constater que cette application est une forme n −linéaire alternée sur $\mathbb{E}$. Elle est donc proportionnelle au déterminant. Il existe donc un élément k de $\mathbb{K}$ tel que :*

$$\forall \ (X_1, X_2, .., X_n) \in \mathbb{E}^n : \ det(A\, X_1, A\, X_2, .., A\, X_n) = k \ det(X_1, X_2, .., X_n)$$

En particulier :

$$det(A\, E_1, A\, E_2, .., A\, E_n) = k \ det(E_1, E_2, .., E_n)$$

soit :

$$det(A_1, A_2, \dots, A_n) = k \ det(I_n)$$

Or, il est facile de vérifier que :

$$det(I_n) = 1$$

car seule la permutation identité donne un terme non nul dans la somme

D'où :

$$det(A) = k$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall\ (\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, .., \boldsymbol{X_n}) \in \mathbb{E}^{\boldsymbol{n}} : \ \ \boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X_2}, .., \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X_n}) = \boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}\ )\ \ \boldsymbol{det}(\ \boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, .., \boldsymbol{X_n})}$$

Soit maintenant deux matrices carrées A et B d'ordre n. On a

$$det(A\,B) det(X_1, X_2, .., X_n) = det\big((A\,B)\,X_1, (A\,B)\,X_2, .., (A\,B)\,X_n\big)$$

$$= det\big(A\,(B\,X_1), A\,(B\,X_2), .., A\,(B\,X_n)\big)$$

$$= det(A\ )\ det(B\,X_1, B\,X_2, .., B\,X_n)$$

$$= det(A\ )\ det(B\ )\ det(\ X_1, X_2, .., X_n)$$

En appliquant cette propriété à $(X_1, X_2, .., X_n) = (E_1, E_2, .., E_n)$ il vient :

$$\boxed{\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}\ )\ \boldsymbol{det}(\ \mathbf{B})}$$

Le déterminant d'un produit de matrices carrées de même ordre est donc le produit de leurs déterminants

On peut noter également que l'on a :

$$\boxed{\boldsymbol{det}({}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}\ )}$$

Le déterminant d'une matrice carrée est égale au déterminant de sa transposée.

Il prend donc une valeur opposée par permutation de lignes.

<u>Preuve</u> :

$$det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\ {}^tA_{\sigma(1)1}\ {}^tA_{\sigma(2)2} \dots {}^tA_{\sigma(n)n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\ A_{1\sigma(1)}\ A_{2\sigma(2)} \dots A_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\ A_{\sigma^{-1}(\sigma(1))\sigma(1)}\ A_{\sigma^{-1}(\sigma(2))\sigma(2)} \dots A_{\sigma^{-1}(\sigma(n))\sigma(n)}$$

Or, puisque σ est bijective, l'ensemble $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots \sigma(n)\}$ est le même que l'ensemble $\{1,2, \dots, n\}$. Par conséquent :

$$det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, A_{\sigma^{-1}(1)1}\, A_{\sigma^{-1}(2)2} \dots A_{\sigma^{-1}(n)n}$$

De plus, exprimons une permutation σ en composée de transpositions :

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \tau_p$$

alors :

$$\sigma^{-1} = {\tau_p}^{-1} \circ \dots {\tau_2}^{-1} \circ {\tau_1}^{-1}$$

et la réciproque d'une transposition τ_{ij} étant la transposition τ_{ji} on constate que σ^{-1} se décompose en un même nombre de transpositions que σ. Elle a donc de ce fait la même signature. Ainsi :

$$det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1})\, A_{\sigma^{-1}(1)1}\, A_{\sigma^{-1}(2)2} \dots A_{\sigma^{-1}(n)n}$$

Or l'application est trivialement injective

$$\varphi : \quad S_n \to S_n$$

$$\sigma \to \sigma^{-1}$$

donc bijective. Ainsi :

$$det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, A_{\sigma(1)1}\, A_{\sigma^{-1}(2)2} \dots A_{\sigma(n)n} \; = det(A)$$

5) <u>Développement du déterminant selon une colonne ou une ligne</u>

Soit une matrice carrée A d'ordre n et $A_1, A_2, \dots, A_n$ ses vecteurs colonnes. Alors, en considérant une colonne j quelconque on a :

$$det(A) = det\big(A_1, A_2, \dots, A_j, \dots, A_n\,\big)$$

$$= det\left(A_1, A_2, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, E_i\,, \dots, A_n\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, det(A_1, A_2, \dots, E_i, \dots, A_n\,)$$

Soit, en permutant E_i avec A_{j-1} puis A_{j-2} etc jusqu'à A_1 , ce qui fait $j-1$ permutations de colonnes :

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} \, a_{ij} \, det(E_i, A_1, A_2, \dots, A_n)$$

Notons alors $det(A_{ij})$ le déterminant de la sous-matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la $ième$ ligne et la $jème$ colonne de A. Par permutation de lignes analogues à celles faites en colonne (il y a $i-1$ permutations à opérer) , on aboutit à :

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1+i-1} \, a_{ij} \, det(A_{ij})$$

Soit :

$$\boxed{\boldsymbol{det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \, a_{ij} \, det(A_{ij})}}$$

Cette formule constitue le développement du déterminant de A par rapport à la $jème$ colonne. Il conduit au calcul de n déterminants d'ordre $n-1$.

6) <u>Comatrice – Inversibilité d'une matrice</u>

Soit une matrice carrée A d'ordre n. Remplaçons sa $jème$ colonne par E_i et posons

$$\Delta_{ij} = det(A_1, A_2, \dots, E_i, \dots, A_n) = (-1)^{i+j} \; det(A_{ij})$$

Notons $Com(A)$ la matrice carrée d'ordre n appelée **comatrice** de A et formée par les Δ_{ij}.
Notons B la matrice :

$$B = {}^tCom(A) \, A$$

Calculons son terme général :

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{n} {}^tCom(A)_{ik} \, a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{ki} \, a_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \, det(A_1, A_2, \dots A_{i-1}, E_k, A_{i+1} \dots, A_n)$$

$$= det\left(A_1, A_2, \dots A_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\, E_k\,, A_{i+1} \dots, A_n\right)$$

$$= det\left(A_1, A_2, \dots A_{i-1}, A_j, A_{i+1} \dots, A_n\right)$$

On constate donc que :

Si $i \neq j$: $B_{ij} = 0$

Si $i = j$: $B_{ij} = det(A)$

Ainsi B est une matrice diagonale dont les termes sont tous égaux à $det(A)$soit :

$$\boxed{\boldsymbol{{}^t Com(A)\, A = det(A)\, I_n}}$$

Il en résulte la propriété :

$$\boldsymbol{A\ inversible \iff det(A) \neq 0}$$

Dans ce cas :

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\ {}^t Com(A)}$$

$$\boldsymbol{det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}}$$

Preuve :

$(\Rightarrow)$ Si A inversible alors il existe une matrice B telle que :

$$A\, B = I_n$$

Donc :

$$det(A\, B) = det(I_n)$$

Soit :

$$det(A\,)\, \det(B) = 1$$

d'où :

$$det(A\,) \neq 0$$

et, puisque $A^{-1} = B$

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

$(\Leftarrow)$ Si $det(A\ ) \neq 0$ alors :

$$\left(\frac{1}{det(A)}\,{}^{t}Com(A)\right)\ A = \ I_n$$

d’où A inversible à gauche donc inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\,{}^{t}Com(A)$$

7) Calcul par bloc

Soit M une matrice carrée d'ordre n constituée de 4 sous matrices A, B, C, O où A est une matrice carrée d'ordre $p < n$, B une matrice carrée d'ordre $m = n - p$, C une matrice rectangulaire à p lignes et m colonnes et O la matrice rectangulaire nulle à m lignes et p colonnes :

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

alors :

$$\boxed{det(M) = det(A)\, det(B)}$$

Preuve :

Commençons par un cas particulier,celui où B est la matrice identité d'ordre m. Ainsi :

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & I_m \end{pmatrix}$$

Un développement par rapport à la dernière ligne associé à un raisonnement par récurrence trivial montre le résultat :

$$det(M) = det(A)$$

Le même résultat s'obtient pour :

$$M = \begin{pmatrix} I_p & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

Pour le cas général, il suffit de noter que l'on a :

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ O & I_m \end{pmatrix}$$

Et prendre le déterminant des deux membres.

8) Déterminant d'un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie

Soit $\boldsymbol{f}$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathbb{V}$ de dimension et $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices de $\boldsymbol{f}$ relativement à deux bases différentes alors :

$$\boldsymbol{det(A) = det\ (B)}$$

Le déterminant d'une matrice de $\boldsymbol{f}$ dans une base quelconque est appelé déterminant de $\boldsymbol{f}$

On a alors la caractérisation :

$$\boldsymbol{f\ automorphisme\ de}\ \mathbb{V} \Leftrightarrow \boldsymbol{det(f) \neq 0}$$

<u>Preuve</u> :

Notons P la matrice de passage de la base dans laquelle A est la matrice de f à la base dans laquelle B est la matrice de f. Nous avons :

$$P^{-1}\,A\,P = B$$

Soit, en prenant le déterminant :

$$det(P^{-1}\,A\,P) = det(B)$$

$$det(P^{-1})\,det(A\,)\,det(P) = det(B)$$

$$\frac{1}{det(P)}det(A\,)\,det(P) = det(B)$$

d'où :

$$det(A\,) = det(B)$$