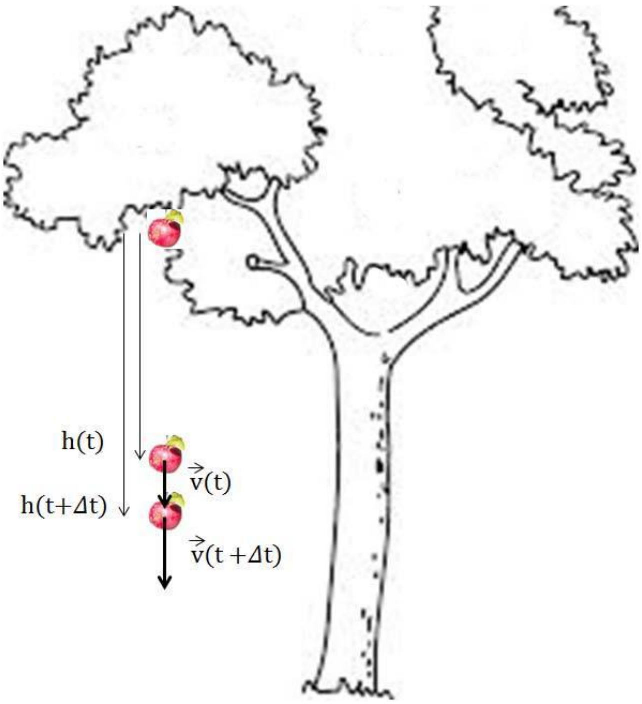
Dérivabilité des fonctions numériques

I Approche

1) Expérience de la chute des corps

La notion de dérivée d'une fonction peut être approchée de façon intuitive par la notion de quantité différentielle infiniment petite, couramment employée dans le domaine de la physique pour établir des modèles de phénomènes physiques. Illustrons-le avec le phénomène de la chute des corps, pour lequel nous renvoyons le lecteur à notre magazine humoristique sur le sujet.



Reprenons donc l''expérience de la chute d'une pomme, celle-là même qui aurait conduit le célèbre Newton à formuler la loi de la gravitation universelle.

La pomme, lâchée sans vitesse initiale, acquiert une hauteur de chute h mesurée en mètre, qui est une fonction de la durée de chute t mesurée en seconde.

L'expérience conduit à une loi de la forme :

$$h = 4{,}9\ t^2$$

On peut alors s'intéresser au concept de vitesse instantanée à l'instant t, en commençant par celui de vitesse moyenne entre deux instants séparés d'une durée Δt supposée faible.

$$v_{moyenne} = \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$

Soit, compte tenu de la loi identifiée :

$$v_{moyenne} = \frac{4{,}9\ (t + \Delta t)^2 - 4{,}9\ t^2}{\Delta t}$$

Une double factorisation donne alors :

$$v_{moyenne} = \frac{4{,}9\ ((t + \Delta t)^2 - t^2)}{\Delta t}$$

$$v_{moyenne} = \frac{4{,}9\ (t + \Delta t - t)\ (t + \Delta t + t)}{\Delta t}$$

Soit, après simplifications :

$$v_{moyenne} = \frac{4{,}9\ \Delta t\ (2\ t + \Delta t)}{\Delta t}$$

$$v_{moyenne} = 4{,}9\ \ (2\ t + \Delta t)$$

Finalement :

$$v_{moyenne} = 9{,}8\ t + 4{,}9\ \Delta t$$

Nous voyons ainsi que, pour une valeur de t fixée, et une valeur de Δt rendue de plus en plus petite, la valeur de la vitesse moyenne tend vers :

$$v = 9{,}8\ t$$

Cette quantité est la vitesse instantanée.

2) <u>Quantités différentielles infinitésimales</u>

Reprenons l'expérience précédente et notons :

$$dt = (t + \Delta t) - t = \Delta t$$

sous-entendant une différence entre deux instants avec l'instant t comme origine, supposée infiniment petite (on peut penser indétectable par des instruments de mesure pour se fixer les idées)

$$dh = h(t + dt) - h(t)$$

sous-entendant la différence de hauteur produite pendant cette différence de temps, supposée infinitésimale elle aussi.

Ces deux quantités sont qualifiées de différentielles et jouent un grand rôle en physique, où elles remplacent avantageusement les notations utilisées en Mathématiques, car elles sont plus intuitives.

La vitesse instantanée s'écrit alors simplement :

$$v = \frac{dh}{dt}$$

et le calcul se déroule comme précédemment aboutissant à :

$$v = 9{,}8\ t + 4{,}9\ dt$$

Comme dt est considéré comme infiniment petit, on néglige tout terme de la forme $b\ dt$ devant tout terme de la forme $a\ t$, a et b étant des constantes quelconques, a non nul.

Ainsi :

$$v = 9{,}8\ t$$

Cette approche n'a pas la rigueur mathématique souhaitée, mais présente le grand intérêt de permettre de retrouver toutes les formules que les mathématiques vont établir sur les dérivées, de façon très intuitive. Nous ne conseillons que trop de ne pas négliger cette approche, incontournable en modélisation des phénomènes physiques.

3) <u>Formules de dérivées obtenues intuitivement</u>

Appliquons, sans souci de rigueur, l'approche précédente pour obtenir un jeu de formules que nous justifierons plus loin avec une approche rigoureuse.

Dans toute la suite, une grandeur y est fonction d'une grandeur x par une fonction de référence, a et b étant des constantes quelconques, a non nul

a) Fonction constante $y = b$

$$dy = b - b = 0$$

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \mathbf{0}}$$

b) Fonction affine : $y = ax + b$

$$dy = (a(x + dx) + b) - (a\,x + b) = a\,dx$$

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{a}}$$

c) Fonction carré : $y = x^2$

$$dy = (x + dx)^2 - x^2 = (x + dx - x)\,(x + dx + x) = dx\,(2\,x + dx)$$

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \mathbf{2}\,\boldsymbol{x}}$$

d) Fonction inverse : $y = \frac{1}{x}$

$$dy = \frac{1}{x + dx} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + dx)}{x\,(x + dx)} = -\frac{dx}{x\,(x + dx)}$$

$$\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}$$

e) Fonction racine carré : $y = \sqrt{x}$

Il suffit de noter, en inversant la relation, que $x = y^2$ donc :

$$\frac{dx}{dy} = 2\,y = 2\,\sqrt{x}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}}}$$

f) Fonction cube : $y = x^3$

$$dy = (x+dx)^3 - x^3 = (x + dx - x)\left((x+dx)^2 + (x+dx)\,x + x^2\right)$$
$$= dx\left((x+dx)^2 + (x+dx)\,x + x^2\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 3\,x^2}}$$

g) <u>Fonction racine cubique :</u> $y = \sqrt[3]{x}$

Il suffit de noter, en inversant la relation, que : $x = y^3$ donc :

$$\frac{dx}{dy} = 3\,y^2 = 3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}}}$$

Ces formules s'obtiennent donc avec grande facilité !

Voyons en d'autres en considérant deux grandeurs physiques u et v toutes deux fonctions de la même variable x

h) <u>Somme :</u> $y = u + v$

$$dy = (u + du + v + dv) - (u + v) = du + dv$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du + dv}{dx}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}}}$$

i) Produit : $y = u \times v$

$$dy = (u + du)\,(v + dv) - u\,v = u\,dv + v\,du + du\,dv$$

$$\frac{dy}{dx} = v\,\frac{du}{dx} + u\,\frac{dv}{dx} + du\,\frac{dv}{dx} = v\,\frac{du}{dx} + (u + du)\frac{dv}{dx}$$

et on néglige du devant u

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} v + u\,\frac{dv}{dx}}}$$

j) Inverse : $y = \frac{1}{u}$

$$dy = \frac{1}{u + du} - \frac{1}{u} = \frac{u - (u + du)}{u\,(u + du)} = -\frac{du}{u\,(u + du)} = -\frac{du}{u^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dy}{dx} == -\frac{\frac{du}{dx}}{u^2}}}$$

k) Quotient $y = \frac{u}{v}$

$$dy = d\left(u \times \frac{1}{v}\right) = du\ \times \frac{1}{v} + u\,d\left(\frac{1}{v}\right) = du\ \times \frac{1}{v} + u \times \left(-\frac{dv}{v^2}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}\ v - u\ \frac{dv}{dx}}{v^2}}}$$

l) Réciproque :

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

m) Composée : Ici y est fonction de u lui-même fonction de x

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}}$$

Exemples d'usage :

$$y = u^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(u^2)}{dx} = \frac{d(u^2)}{du} \times \frac{du}{dx} = 2\,u\,\frac{du}{dx}$$

Avouez que retrouver toutes ses formules de dérivations en quelques lignes élémentaires, c'est rudement intéressant et ça permet de bien sentir ce concept de dérivée, que nous allons maintenant aborder sous l'angle mathématique donc rigoureux.

II Dérivabilité d'une fonction numérique

1) Définition

On dit que f est dérivable à droite en x_0 si f est localement définie et continue à droite en x_0 et vérifie :

$$\exists\ \mathbf{a} \in \mathbb{R} : \quad \lim_{x \to x_0^+} \boldsymbol{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a}$$

Le nombre a est alors appelé nombre dérivé à droite de f en x_0 et noté : $f'_d(x_0)$

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si f est localement définie et continue à gauche en x_0 et vérifie :

$$\exists \text{ a} \in \mathbb{R} : \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

Le nombre a est alors appelé nombre dérivé à gauche de f en x_0 et noté : $f'_g(x_0)$

On dit que f est dérivable en x_0 si f est dérivable à gauche en x_0 et non localement définie à droite ou dérivable à droite en x_0 et non localement définie à gauche ou f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ noté $f'(x_0)$

<u>Remarque</u> :

D'un point de vue pratique, il est plus intéressant d'effectuer un changement de variable pour le calcul de la limite, ainsi par exemple pour la dérivabilité à gauche :

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

II Interprétation graphique- Equation de la tangente

1) <u>Interprétation graphique</u>

Considérons le point A de la représentation graphique d'une fonction f d'abscisse x_0 en laquelle la fonction est supposée dérivable à droite et à gauche par exemple, et considérons un point M de la courbe d'abscisse $x = x_0 + h$ quelconque. La droite (AM) a alors un coefficient directeur représenté sur la figure ci-dessous par la différence entre l'ordonnée du point C et celle du point B. Ce coefficient directeur n'est autre que le taux d'accroissement de la fonction entre les abscisses x_0 et $x_0 + h$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Or, si on fait tendre le point M vers le point A, ce qui revient à faire tendre h vers 0, un logiciel graphique comme geogebra par exemple, montre que la corde se rapproche jusqu'à pratiquement se confondre, d'une droite oblique appelée tangente à la courbe au point A. Le coefficient directeur de cette droite « limite » n'est donc que le nombre dérivé de f en x_0

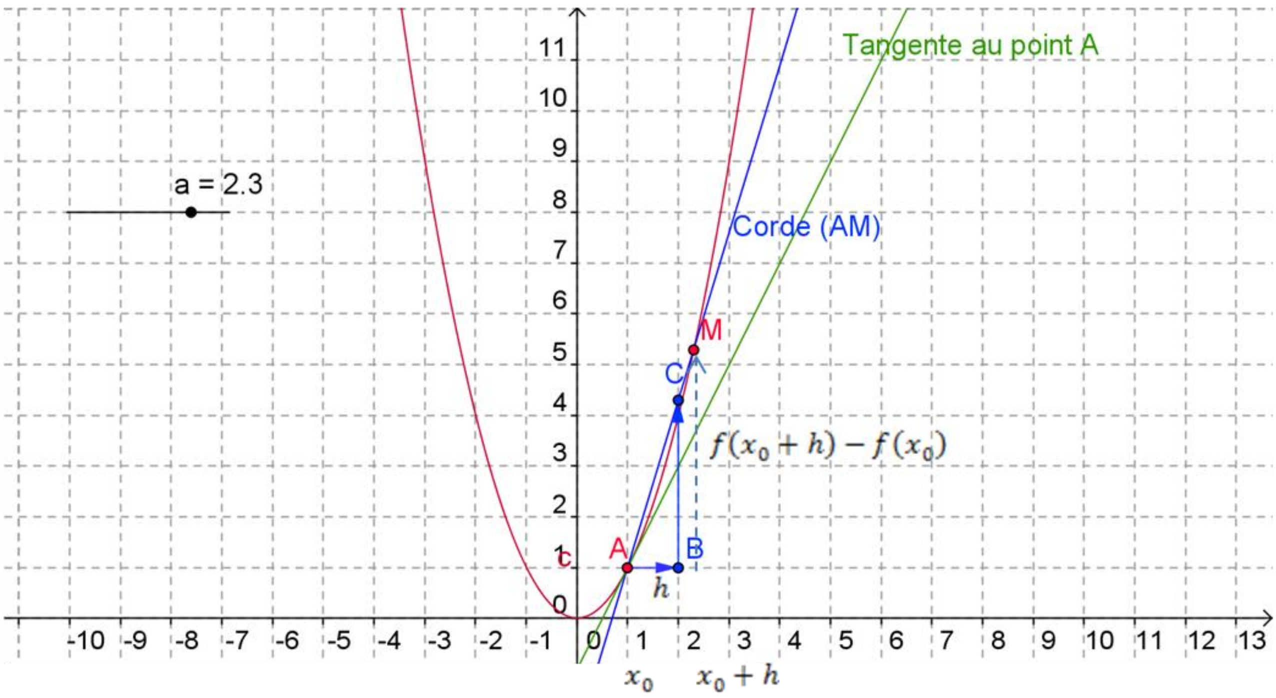


Figure 1 : point M quelconque

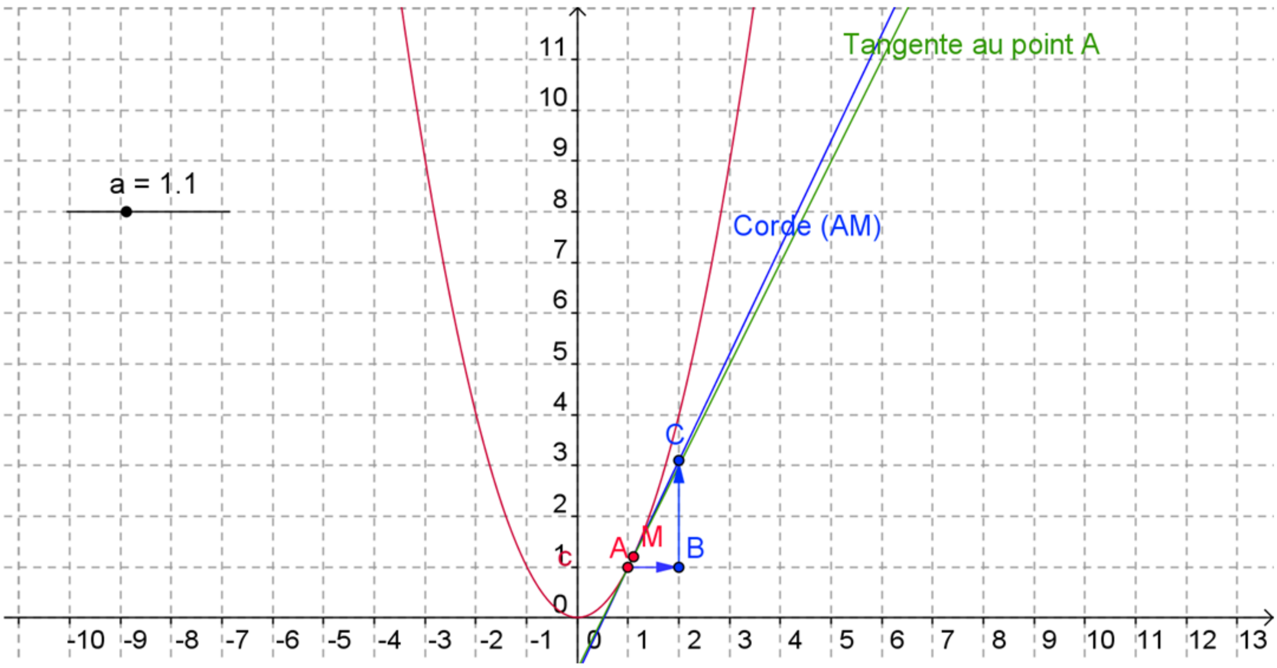


Figure 2 : point M proche de A par la droite

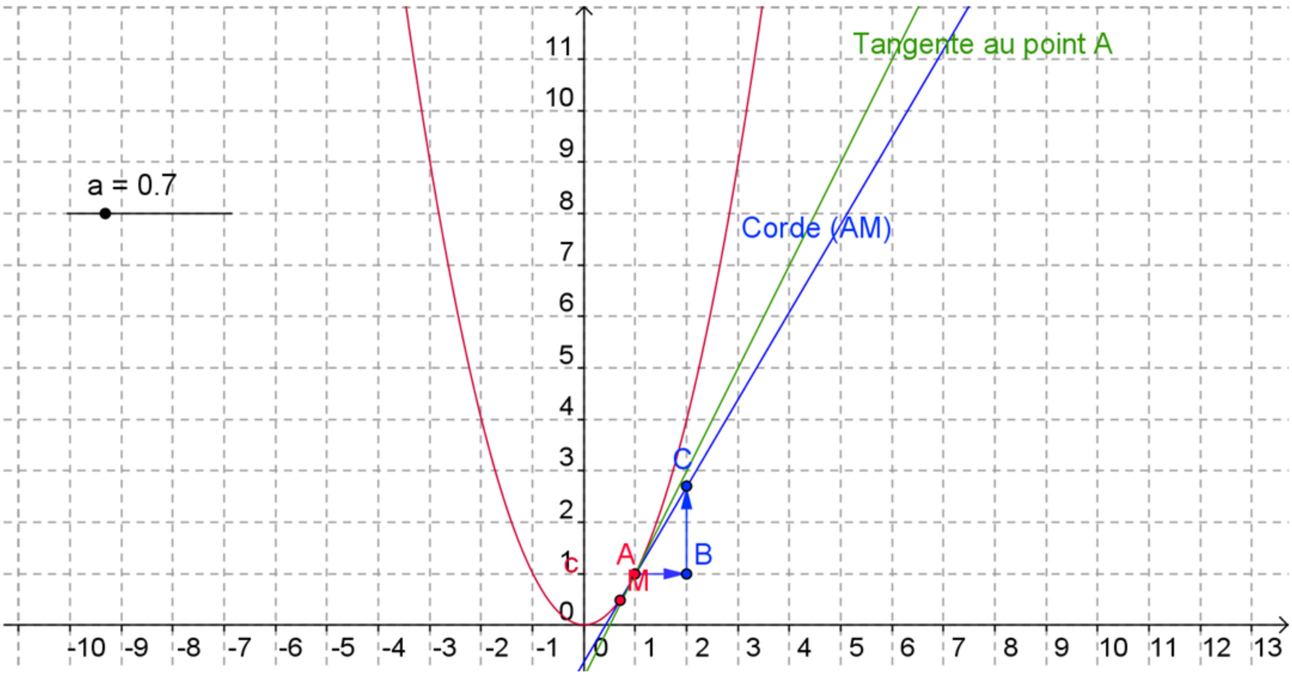


Figure 3 : point M proche de A par la gauche

2) Equation de la tangente

Avec les notations précédentes, si une fonction f est dérivable en x_0, alors sa courbe représentative admet une tangente au point A d'abscisse x_0 et cette tangente a pour coefficient directeur $f'(x_0)$.

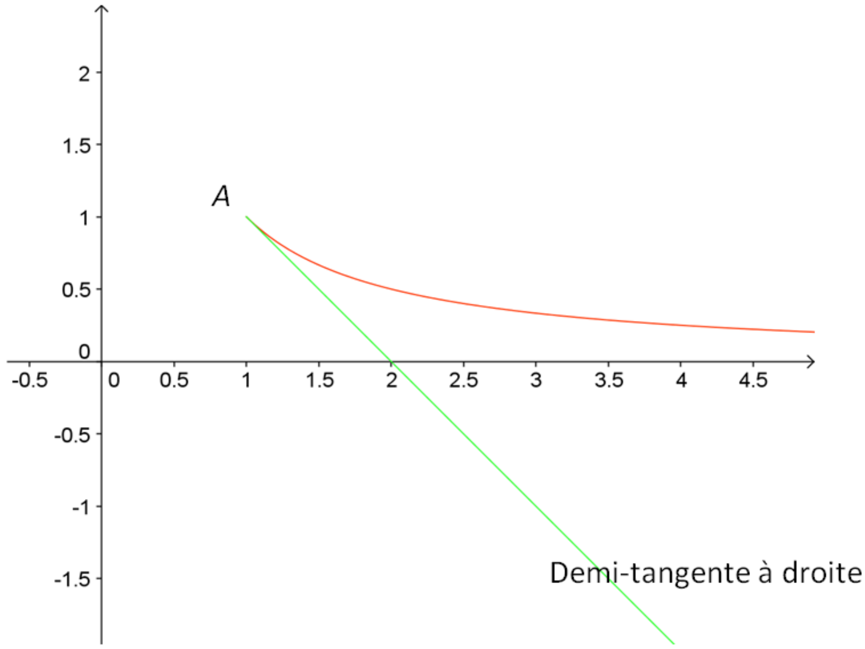
Rappelons que l'équation réduite de la droite passant par un point $A(\alpha, \beta)$ et de coefficient directeur m est :

$$y = m\,(x - \alpha) + \beta$$

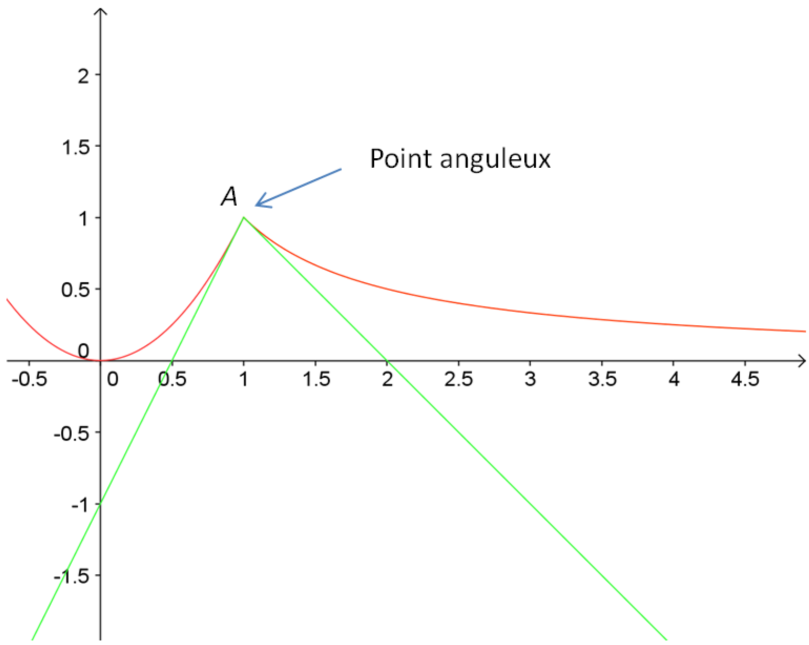
Il en découle que la tangente que nous noterons T_{x_0} a pour équation réduite :

$$\boxed{\boldsymbol{y = f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)}}$$

A noter, lorsque f n'est dérivable qu'à droite en x_0., sa courbe n'admet qu'une **demi-tangente à droite** en x_0 et lorsqu'elle n'est dérivable qu'à gauche en x_0., qu'une **demi tangente à gauche** en x_0.



Lorsque f est dérivable à gauche et à droite en x_0. mais que les nombres dérivés à gauche et à droite en x_0. sont distincts, f admet une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite en x_0. dont l'union ne forme pas une droite. On dit alors que la courbe de f présente un **point anguleux** en x_0.



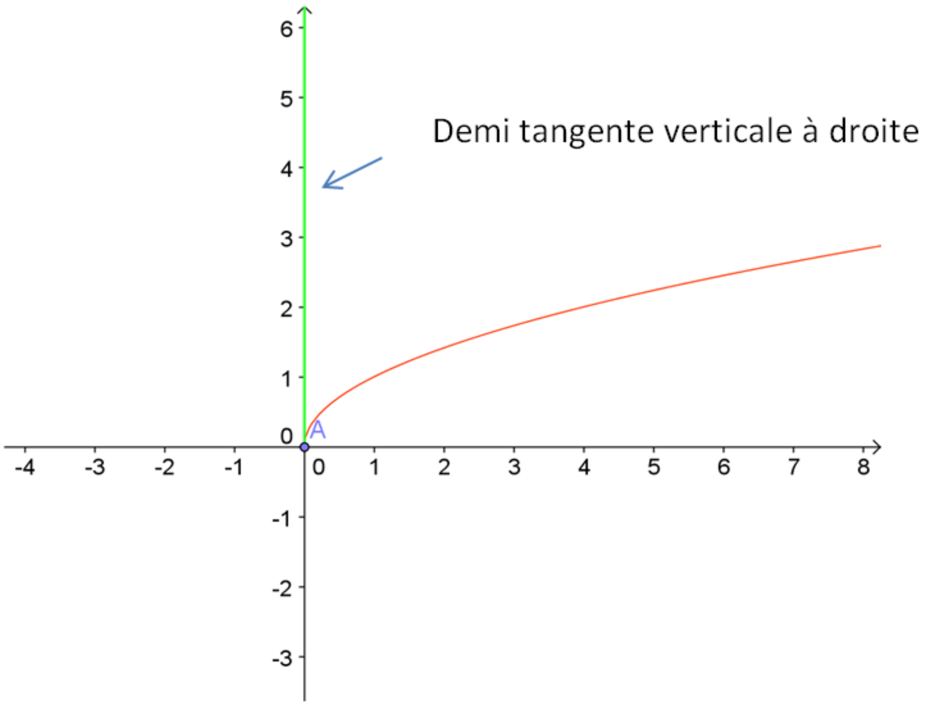
Cas particulier de la tangente verticale (ou demi tangente verticale):

Si on a

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \text{ ou } -\infty$$

alors la courbe de f admet une demi-tangente verticale à droite

Exemple : la fonction racine carré en 0 :



Si :

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \text{ ou } -\infty$$

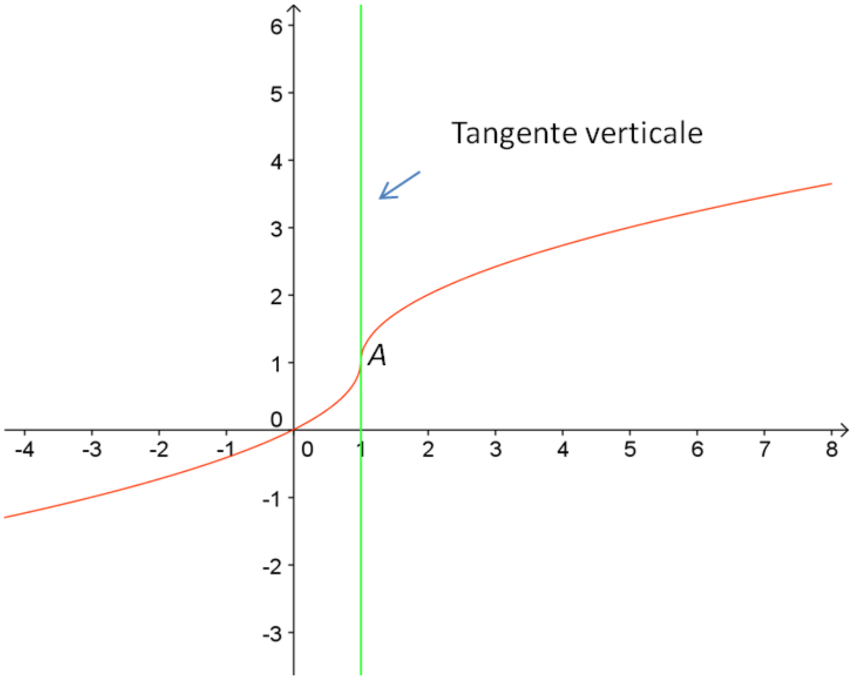
alors la courbe de f admet une demi-tangente verticale à gauche

Si **f est localement définie à droite et à gauche de x_0 et si :**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \text{ ou } -\infty$$

alors la courbe de f admet une tangente verticale

Exemple :



III Propriétés

Dans toute la suite f et g désignent deux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f \cap D_g$ et pour les démonstrations, h est un réel non nul tel que $x_0 + h \in D_f \cap D_g$ et $h > 0$ dans le cas de dérivabilité à droite et $h < 0$ dans celui de dérivabilité à gauche.

1) Somme

Si f et g sont dérivables en x_0(resp. à droite, à gauche) alors la fonction somme $f + g$ est dérivable en x_0(resp. à droite, à gauche) et :

$$\boxed{(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)}$$

Preuve :

$$\frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} = \frac{\big(f(x_0+h) + g(x_0+h)\big) - \big(f(x_0) + g(x_0)\big)}{h}$$

$$= \frac{\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big) - \big(g(x_0+h) - g(x_0)\big)}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

Donc par propriété de la somme des limites :

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h}=f'(x_0)+g'(x_0)$$

$f+g$ est donc dérivable en x_0 et :

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

2) Produit

Si f et g sont dérivables en x_0(resp. à droite, à gauche) alors la fonction produit $f\times g$ est dérivable en x_0(resp. à droite, à gauche) et :

$$\boxed{\boldsymbol{(f\times g)'(x_0)=f'(x_0)\,g(x_0)+f(x_0)\,g'(x_0)}}$$

Preuve :

$$\frac{(f\times g)(x_0+h)-(f\times g)(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)\times g(x_0+h)-f(x_0)\times g(x_0)}{h}$$

Faisons apparaître l'accroissement de g dans une transformation attribuée au Mathématicien Abel :

$$\frac{f(x_0+h)\times\big(g(x_0+h)-g(x_0)+g(x_0)\big)-f(x_0)\times g(x_0)}{h}$$

$$=\frac{f(x_0+h)\times\big(g(x_0+h)-g(x_0)\big)+f(x_0+h)\times g(x_0)-f(x_0)\times g(x_0)}{h}$$

$$=f(x_0+h)\ \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}+g(x_0)\ \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Donc par propriété du produit des limites , de la somme des limite et continuité de f en x_0 :

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f\times g)(x_0+h)-(f\times g)(x_0)}{h}=f(x_0)\times g'(x_0)+g(x_0)\times f'(x_0)$$

$f\times g$ est donc dérivable en x_0 et :

$$(f\times g)'(x_0)=f'(x_0)\times g(x_0)+f(x_0)\times g'(x_0)$$

3) Inverse

Si f est dérivable en x_0(resp. à droite, à gauche) et $f(x_0)\neq 0$ alors la fonction inverse $1/f$ est dérivable en x_0(resp. à droite, à gauche) et :

$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f}}\right)'(\boldsymbol{x_0}) = -\frac{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_0})}{\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})\right)^2}$$

Preuve :

f étant continue en x_0 et $f(x_0) \neq 0$, f est non nulle au voisinage de 0 c'est-à-dire sur un intervalle ouvert de la forme $]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha[$ avec $\alpha > 0$. Soit donc h non nul tel que : $|h| < \alpha$ alors : $x_0 + h \in\ ]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha[$ donc $f(x_0 + h) \neq 0$ et on a :

$$\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x_0 + h) - \left(\frac{1}{f}\right)(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{f(x_0 + h)} - \frac{1}{f(x_0)}}{h}$$

$$= \frac{\frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{f(x_0 + h)\, f(x_0)}}{h}$$

$$= -\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h\, f(x_0 + h)\, f(x_0)}$$

$$= -\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \times \frac{1}{f(x_0 + h)\, f(x_0)}$$

Donc par propriété du produit des limites , de l'inverse d'une et continuité de f en x_0 :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x_0 + h) - \left(\frac{1}{f}\right)(x_0)}{h} = -f'(x_0) \times \frac{1}{f(x_0)\, f(x_0)}$$

$\frac{1}{f}$ est donc dérivable en x_0 et :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{\left(f(x_0)\right)^2}$$

4) Quotient

Si f et g sont dérivables en x_0(resp. à droite, à gauche) et $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction quotient f/g est dérivable en x_0(resp. à droite, à gauche) et :

$$\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)'(\boldsymbol{x_0}) = -\frac{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_0})\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_0}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})\, \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x_0})}{\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_0})\right)^2}$$

Preuve :

Il suffit de noter que :

$$\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$$

Les propriétés de l'inverse et du produit montrent alors que ce quotient est dérivable en x_0 et que :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \times \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \times \left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0) \times \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$

$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0) \times \frac{-g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$$

$$= \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$$

III Composée de fonctions dérivables

Soit une fonction $\boldsymbol{g}$ définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{D_g}$ et une fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur une partie de $\mathbb{R}$ telle que $\boldsymbol{g(x_0)} \in \boldsymbol{D_f}$ alors

Si $\boldsymbol{g}$ est dérivable en $\boldsymbol{x_0}$(resp. à droite, à gauche) et $\boldsymbol{f}$ est dérivable en $\boldsymbol{g(x_0)}$ alors la composée $\boldsymbol{f \circ g}$ est dérivable en $\boldsymbol{x_0}$(resp. à droite, à gauche) et :

$$\boxed{(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{f}'\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_0})\big) \times \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x_0}) = (\boldsymbol{f}' \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x_0}) \times \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x_0})}$$

Preuve

$$\frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{h} = \frac{f\big(g(x_0 + h)\big) - f\big(g(x_0)\big)}{h} =$$

$$= \frac{f\big(g(x_0 + h)\big) - f\big(g(x_0)\big)}{g(x_0 + h) - g(x_0)} \times \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

Posons alors :

$$y_0 = g(x_0)$$

$$H(h) = g(x_0 + h) - g(x_0)$$

On a alors :

$$\frac{(f\circ g\,)(x_0+h)-(f\circ g)(x_0)}{h}$$

$$=\frac{f\big(y_0+H(h)\big)-f(y_0)}{H(h)}\times\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

Or par continuité de g en x_0, on a :

$$\lim_{h\to 0} H(h)=0$$

On en déduit par propriété de composition des limites et limite d'un produit :

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f\circ g\,)(x_0+h)-(f\circ g)(x_0)}{h}=f'(y_0)\ \times\ g'(x_0)=f'\big(g(x_0)\big)\ \times\ g'(x_0)$$

IV Dérivabilité de la réciproque d'une application dérivable

Soit une fonction f définie, continue et injective, donc strictement monotone sur un intervalle J de $\mathbb{R}$,

Rappelons que f est une bijection de J sur $f(J)$ qui est un intervalle K et permet de définir une application réciproque f^{-1} qui est alors une fonction continue sur l'intervalle K

Alors, si $y_0\in K$, $x_0=f^{-1}(y_0)$ et $f'(x_0)\neq 0$, f^{-1} est dérivable en y_0 et :

$$\boxed{\boldsymbol{(f^{-1}\,)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0)\,)}}}$$

Preuve

Nous supposerons par exemple f strictement croissante sur l'intervalle J et localement définie à droite en x_0 donc, de ce fait, localement définie à droite en y_0.

Soit $h>0$ tel que : $y_0+h\in K$ alors en posant :

$$H(h)=f^{-1}(y_0+h)-f^{-1}(y_0)$$

on a :

$$f^{-1}(y_0+h)=f^{-1}(y_0)+H(h)=x_0+H(h)$$

Donc :

$$f\big(x_0 + H(h)\big) = y_0 + h = f(x_0) + h$$

Soit :

$$h = f\big(x_0 + H(h)\big) - f(x_0)$$

Le taux d'accroissement de f^{-1} entre y_0 et $y_0 + h$ s'écrit alors :

$$\frac{f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \frac{H(h)}{f\big(x_0 + H(h)\big) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f\big(x_0 + H(h)\big) - f(x_0)}{H(h)}}$$

En utilisant le caractère dérivable à droite de f en x_0 et la composition des limites, après avoir noté que :

$$\lim_{h \to 0^+} H(h) = 0^+$$

on en déduit :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Remarques :

A noter que si f admet une tangente verticale (ou demi-tangente) en x_0 alors on a :

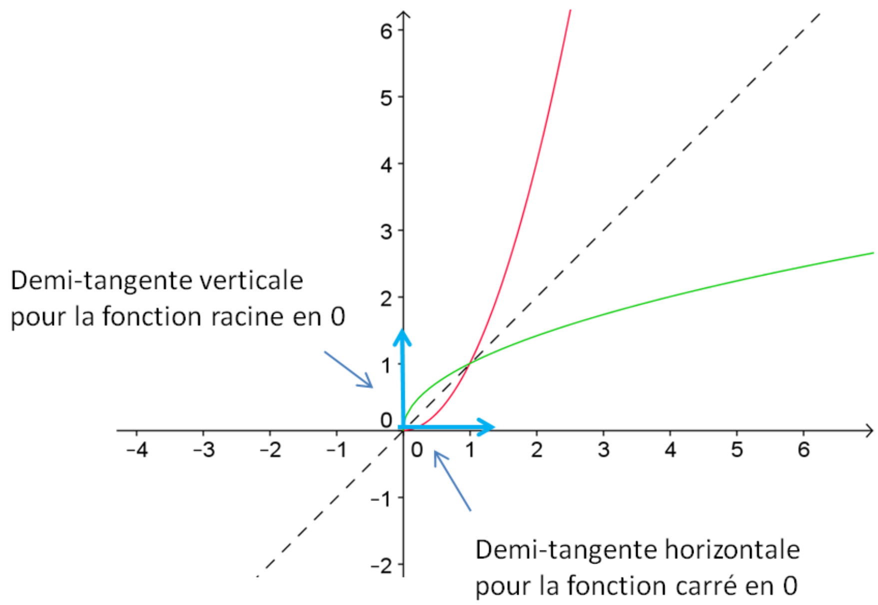
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty \; ou - \infty$$

Et alors :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f^{-1}(y_0 + h) - f^{-1}(y_0)}{h} = 0$$

Donc f^{-1} est dérivable en y_0 et $(f^{-1})'(y_0) = 0$

Ceci est très net sur un graphique, puisque la courbe représentative de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$ comme illustré ci-dessous pour la l'application bijective définie par la fonction carré de $[0; +\infty[$ dans $[0; +\infty[$ et sa réciproque définie parla fonction racine carrée.



IV fonctions dérivables de référence

Dans toute la suite, $x_0 \in \mathbb{R},\ h \in \mathbb{R}^*$

a) **Fonction constante $f(x) = b$** :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, x \in \mathbb{R} \;\; : \; f'(x) = 0$

Preuve :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{b-b}{h} = 0$$

Donc :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

b) **Fonction $f(x) = x$**

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, x \in \mathbb{R} \;\; : \; f'(x) = 1$

Preuve :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)-(x_0)}{h} = 1$$

Donc :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

c) **Fonctions** $\boldsymbol{f(x) = x^n}$ **,** $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, x \in \mathbb{R} \;:\; f'(x) = n\, x^{n-1}$

Preuve :

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ en considérant le prédicat $P(n)$ suivant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \;:\; f(x) = x^n \Rightarrow \forall\, x \in \mathbb{R} \;:\; f'(x) = n\, x^{n-1}$$

Initialisation : Pour $n = 1$

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^1$, nous avons vu qu'elle était dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \;:\; f'(x) = 1 = 1\, x^{1-1}$$

Donc $P(1)$ est vraie

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vrai alors

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{n+1} = x^n\, x$

En utilisant la propriété du produit et l'hypothèse de récurrence, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \;:\; f'(x) = n\, x^{n-1}\, x + x^n \times 1 = n\, x^n + x^n = (n + 1\,)x^n = (n + 1\,)x^{(n+1)-1}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie

Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

d) **Polynômes** : $\boldsymbol{f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0}$, avec les $a_i \in \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, x \in \mathbb{R} \;:\; f'(x) = n\, a_n\, x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1}\, x^{n-2} + \cdots + a_1$

Preuve :

C'est un conséquence immédiate des propriétés du produit et de la somme de fonctions dérivables.

e) Fractions rationnelles

Les fractions rationnelles, qui sont le quotient de deux polynômes, sont dérivables sur leur domaine de définition.

Preuve :

Il suffit de considérer la propriété précédente et la propriété du quotient

f) Fonctions trigonométriques

Le fichier intitulé Trigonométrie a fait apparaître par la géométrie que les fonctions sinus et cosinus étaient dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \ : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{sin}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \ : \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \mathbf{cos}(\boldsymbol{x})$$

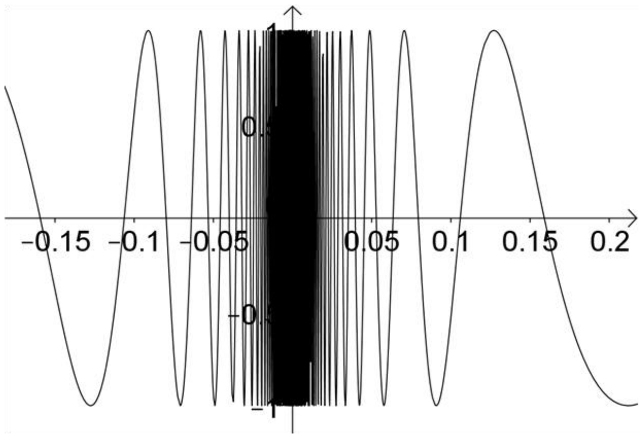
$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \ : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{cos}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \ : \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = -\mathbf{sin}(\boldsymbol{x})$$

Nous verrons une définition rigoureuse de ces fonctions et une preuve de ce fait dans le fichier consacré aux développements limités.

V Une fonction étrange

Rappelons la fonction déjà étudiée dans le fichier Limites et définie sur $\mathbb{R}^*$ par **:**

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

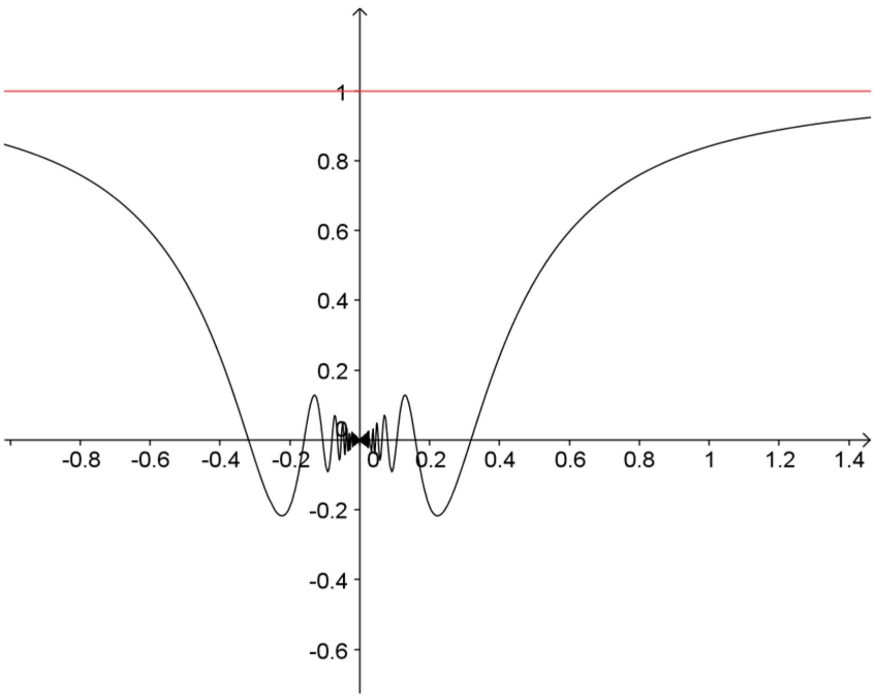


Nous avions vu que cette fonction n'admettait pas de limite en 0 ce qui ne permettait pas d'en faire un prolongement continu. Afin d'améliorer cette situation, il suffit de multiplier cette fonction par une fonction qui tend vers 0 en 0, la plus simple étant la fonction $g(x) = x$

Considérons donc la fonction ainsi modifiée :

$$f(x) = x \ \sin\left(\frac{1}{x}\right) \ si \ x \ \neq 0$$
$$f(0) = 0$$

Le traceur de courbes geogebra permet d'en voir l'allure :



La fonction semble bien continue en 0 ce qui est aisé à vérifier. En effet :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \ : \ \mathbf{0} \leq \left| x \ \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$$

D’après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \to 0} \left| x \ \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = 0$$

Donc :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Par les propriétés générales de la dérivation vues précédemment, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Voyons alors si f est dérivable en 0.

Soit $h \in \mathbb{R}^*$, le taux d’accroissement de f entre 0 et $0 + h$ est :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h \ \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

Nous avons vu que cette fonction de h n’avait pas de limite en 0 donc f n’est pas dérivable en 0.

Afin de rendre f dérivable en 0, il faut écraser un peu plus la courbe par ses enveloppes au voisinage de 0, ce qui s’obtient en considérant :

$$f(x) = x^2 \ \sin\left(\frac{1}{x}\right) \ si \ x \neq 0$$
$$f(0) = 0$$

Le taux d’accroissement en 0 devient alors :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \ \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = h \ \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

Et il tend bien vers une limite finie, en l’occurrence 0, quand h tend vers 0, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$