Dénombrabilité des ensembles

I Introduction- Définition

L'idée de dénombrabilité d'un ensemble est de pouvoir compter un à un chacun de ses éléments jusqu'à l'infini.

Prenons l'exemple de l'ensemble des nombres entiers négatifs ou nuls, nous pouvons créer la correspondance définie par le tableau :

0	1	2	3	4	…	n
0	-1	-2	-3	-4	…	-n

Cette correspondance n'est rien d'autre qu'une application bijective de $\mathbb{N}$ dans cet ensemble.

Un autre exemple est formé par l'ensemble des nombres pairs. La correspondance suivante traduit une application bijective de $\mathbb{N}$ dans cet ensemble.

0	1	2	3	4	…	n
0	2	4	6	8	…	2 n

Définition

Un ensemble $\mathbb{E}$ est dit dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans cet ensemble.

II Dénombrabilité de l'ensemble des couples d'entiers naturels

Nous allons montrer que l'ensemble des couples d'entiers naturels $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Pour cela il est facile de compter les couples en remplissant un tableau de la façon suivante :

x\y	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	0	2	5	9	14				
1	1	4	8	13	⋰				
2	3	7	12	18					
3	6	11	17						
4	10	16							
5	15								
$\vdots$									

Ainsi , le couple $(0\,;\ 0)$ porte le numéro 0, le couple $(1\,;\ 0)$ le numéro 1, le couple $(0\,;\ 1)$ le numéro 2, le couple $(3\,;\ 2)$ le numéro 17.

Maintenant, si nous souhaitons connaître le numéro attribué au couple $(50\,;40)$ il serait très inélégant de continuer de remplir le tableau jusqu'à la cellule correspondante. De même, si nous souhaitons connaître le couple de numéro 1512.

La solution pour contourner cette difficulté consiste à chercher une expression analytique du numéro d'un couple $(x\,;\ y)$ en fonction de x et de y. Pour cela, il suffit de constater que les numéros de la première colonne sont formés des sommes des entiers consécutifs. Ainsi :

0	**0**
1	**0+1**
2	**0+1+2**
3	**0+1+2+3**
4	**0+1+2+3+4**
5	**0+1+2+3+4+5**
⋮	⋮

Considérons donc un couple quelconque $(x\ ;\ y)$. La cellule qui contient le numéro qui lui est attribué noté q se trouve à l'intersection de la ligne x et de la colonne y. Considérons la diagonale montante contenant cette cellule et représentée en vert.

x\y	**0**	**1**	**2**	**3**	**…**	**…**	y	**…**	**…**		
0	**0**	**2**	**5**								
1	**1**	**4**									
2	**3**										
⋮											
x							**q**				
⋮											
⋮											
				⋰							
			P+2								
		P+1									
$x+y$	**p**										

La première cellule de cette diagonale se trouve à l'intersection de la ligne $(x+\ y)$ et de la colonne 0. Cette cellule contient le numéro noté p dans le tableau :

$$\mathrm{p}=1+2+3+..+(x+\ y)=\frac{(x+\ y)\,(x+\ y+1)}{2}$$

Le numéro q se déduit du numéro p facilement en remontant cette diagonale de y cases :

$$\mathrm{q}=\mathrm{p}+\mathrm{y}$$

Nous pouvons donc décrire la bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ sous la forme :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{f}: \quad \mathbb{N}^{\mathbf{2}} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (\boldsymbol{x}\,;\boldsymbol{y}) & \rightarrow & \dfrac{(\boldsymbol{x}+\ \boldsymbol{y})\,(\boldsymbol{x}+\ \boldsymbol{y}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}+\boldsymbol{y} \end{array}}$$

Notons alors que pour les couples $(x\ ;\ y)$ associés aux cellules de la diagonale montante en vert, la somme $x+\ y$ est constante.

Notons alors, pour $m\in\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2{}_m$ l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ dont la somme $x+\ y$ est égale à m. Il sont associés aux cellules de la diagonale montante qui commence à la cellule associée au couple $(m\ ;\ 0)$ et qui finit à la cellule associée au couple $(0\ ;\ m)$. Plus précisément :

$$\mathbb{N}^2{}_m=\{(k\ ;\ m-k)\ :\ k\in\mathbb{N}\,,0\le k\le m\ \}$$

$\mathbb{N}^2{}_m$ contient donc $m+1$ éléments.

$$f(\mathbb{N}^2{}_m)=\left\{\frac{m\,(m+1)}{2}+m-k\ :\ k\in\mathbb{N}\,,0\le k\le m\ \right\}$$

$f(\mathbb{N}^2{}_m)$ est donc un intervalle d'entiers naturels dont le plus petit élément est :

$$\frac{m\,(m+1)}{2}$$

et le plus grand élément :

$$\frac{m\,(m+1)}{2}+m$$

Or l'entier suivant ce dernier est :

$$\frac{m\,(m+1)}{2}+m+1=\frac{m\,(m+1)}{2}+\frac{2\,(m+1)}{2}=\frac{(m+1)\,(m+2)}{2}$$

C'est donc le plus petit élément de $f(\mathbb{N}^2{}_{m+1})$.

Ainsi :

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} f(\mathbb{N}^2{}_m) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left[\frac{m\,(m+1)}{2}\ ;\ \frac{m\,(m+1)}{2} + m\right] = \mathbb{N}$$

Cela prouve que f est surjective. f est injective de façon évidente car sa restriction à chaque $\mathbb{N}^2{}_m$ l'est. Elle est donc bijective, mais la façon de remplir le tableau le faisait voir clairement.

Reste à déterminer comment évaluer le couple antécédent $(x\ ;\ y)$ d'un entier naturel n quelconque. Pour cela, cherchons d'abord la somme $m = x + y$. Elle vérifie :

$$\frac{m\,(m+1)}{2} \leq n < \frac{(m+1)\,(m+2)}{2}$$

Soit :

$$\boxed{\boldsymbol{m\,(m+1) \leq 2\,n < (m+1)\,(m+2)}}$$

Une fois m déterminé, il est facile d'en déduire y par :

$$\boxed{\boldsymbol{y = n - \frac{m\,(m+1)}{2}}}$$

puis x par :

$$\boxed{\boldsymbol{x = m - y}}$$

Nous pouvons donc répondre aux problèmes posés :

1) Numéro attribué au couple $(50\,;40)$:

$$f(50\ ;\ 40) = \frac{90 \times 91}{2} + 40 = 4135$$

2) Couple de numéro 1512

On cherche l'unique entier m tel que : $m\,(m+1) \leq 2\ \times 1512 < (m+1)\,(m+2)$

On trouve :

$$54\ \times 55 \leq 3024 < 55\ \times 56$$

On en déduit $m = 54$ puis :

$$y = 1512 - \frac{54\ \times 55}{2} = 27$$

$$x = 54 - 27 = 27$$

Le couple de numéro 1512 est donc le couple $(27\,;27)$