Théorème de Sylvester – Décomposition de Gauss

Définition :

Soit Q une forme quadratique sur $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ défini par les matrices uni-colonnes à n lignes. On appelle **signature** de la forme quadratique, un couple d'entiers naturels (r, s) tel que Q puisse s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{X} \in \mathbb{E} : \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{r} \big(\boldsymbol{L_i}(\boldsymbol{X})\big)^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} \big(\boldsymbol{L_i}(\boldsymbol{X})\big)^2}$$

où $(L_1, L_2, .., L_r, L_{r+1}, .., .., L_{r+s})$ est une famille libre de formes linéaires sur $\mathbb{E}$. Nous qualifierons la forme obtenue de **décomposition de Sylvester**.

Théorème :

Toute forme quadratique sur $\mathbb{E}$ possède une unique signature pouvant être associée à plusieurs décompositions de Sylvester.

Preuve :

L'existence de la décomposition est assurée par le fait que la matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormale. On a ainsi :

$$P^{-1}\, A\, P = \ {}^{t}P\, A\, P = D$$

où D est une matrice diagonale. Si on note r (respectivement s) la somme des dimensions des sous espaces propres associés aux valeurs propres strictement positives (respectivement strictement négatives), D peut être formée (éventuellement, si elle possède des valeurs propres strictement positives) d'un premier bloc diagonal à éléments diagonaux strictement positifs et (éventuellement encore) d'un second à éléments strictement négatifs et (éventuellement) d'un dernier à éléments nuls Auquel cas en notant :

$$X' = P^{-1} X = \ {}^{t}P\, X$$

on a :

$$Q(X) = \ {}^{t}X\, A\, X = \ {}^{t}X' \ {}^{t}P\, A\, P\, X' = \ {}^{t}X'\, D\, X' = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, (x_i')^2 + \sum_{i=r+1}^{r+s} \lambda_i\, (x_i')^2$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \left(\sqrt{\lambda_i}\, x_i'\right)^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} \left(\sqrt{-\lambda_i}\, x_i'\right)^2$$

les sommes étant considérées par convention nulles si l'indice final est inférieur à l'indice initial.

Posons pour $i \in [\![1\,; r]\!]$:

$$L_i(X) = \sqrt{\lambda_i}\, x_i' = \sqrt{\lambda_i} \sum_{j=1}^{n} p_{ji}\, x_j$$

Et pour $i \in [\![r+1\,; r+s]\!]$:

$$L_i(X) = \sqrt{-\lambda_i}\, x_i' = \sqrt{-\lambda_i} \sum_{j=1}^{n} p_{ji}\, x_j$$

Ainsi :

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{r} \big(L_i(X)\big)^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} \big(L_i(X)\big)^2$$

Notons $(l_i)_{i=1,..,n}$ la base duale de la base canonique, c'est-à-dire vérifiant :

$$l_i\big(E_j\big) = \delta_{ij} \ \ (donc\ 1\ si\ i = j, 0\ sinon)$$

Alors , pour tout $i \in [\![1\,; r + s]\!]$:

$$L_i = \mu_i \sum_{j=1}^{n} p_{ji}\, l_j\,, \qquad où\ \ \mu_i = \sqrt{\lambda_i}\ pour\ i \in [\![1\,; r]\!], \sqrt{-\lambda_i}\ pour\ i \in [\![r + 1\,; r + s]\!]$$

Considérons alors une combinaison linéaire nulle :

$$\sum_{i=1}^{r+s} a_i\, L_i = 0$$

Alors :

$$\sum_{i=1}^{r+s} a_i \left(\mu_i \sum_{j=1}^{n} p_{ji}\, l_j \right) = 0$$

Soit en intervertissant les signes sommes :

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{r+s} p_{ji}\, \mu_i\, a_i \right) l_j = 0$$

Donc pour tout $j \in [\![1\,; n]\!]$

$$\sum_{i=1}^{r+s} p_{ji}\, \mu_i\, a_i = 0$$

Soit en notant P_i la colonne de numéro i de la matrice P :

$$\sum_{i=1}^{r+s} \mu_i\, a_i\, P_i = 0$$

Les colonnes de P formant une famille libre, on en déduit pour tout $i \in [\![1\,; r + s]\!]$:

$$\mu_i\, a_i = 0$$

Donc :

$$a_i = 0$$

La famille $(L_i)_{i \in [\![1, r+s]\!]}$ est donc une famille libre, ce qui prouve l'existence d'une signature.

Voyons l'unicité.

Considérons deux décompositions :

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{r} \big(L_i(X)\big)^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} \big(L_i(X)\big)^2 = \sum_{i=1}^{r\prime} \big(L'_i(X)\big)^2 - \sum_{i=r\prime+1}^{r\prime+s\prime} \big(L'_i(X)\big)^2$$

Les familles $(L_i)_{i\in[\![1,r+s]\!]}$, $(L'_i)_{i\in[\![1,r\prime+s\prime]\!]}$ étant libres, elles peuvent être complétées chacune en une base $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, $(L'_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathbb{E}$.

Posons alors pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$:

$$L_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, l_i, \quad L'_j = \sum_{i=1}^{n} p'_{ij}\, l_i$$

Les matrices $P = \big(p_{ij}\big)$ et $P' = \big(p'_{ij}\big)$ étant inversibles, on peut former deux bases de $\mathbb{E}$ $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}\ et\ (X'_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ telles que :

$$L_j(X_i) = \delta_{ij}\ , \qquad L'_j(X'_i) = \delta_{ij}$$

Montrons alors que la famille $(X_1, .. X_r, X'_{r'+1}, \dots, X_n)$ est libre en partant d'une combinaison linéaire nulle :

$$a_1\, X_1 + .. + a_r\, X_r + a_{r'+1}\, X'_{r'+1} + \cdots + a_n\, X'_n = 0$$

Alors :

$$Q(a_1\, X_1 + .. + a_r\, X_r) = Q(-a_{r'+1}\, X'_{r'+1} - \cdots - a_n\, X'_n)$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{r} {a_i}^2 = - \sum_{i=r'+1}^{r'+s\prime} {a_i}^2$$

Il en résulte que pour tout $i \in [\![1\,;r]\!] :\ a_i = 0$ et pour tout $i \in [\![r'+1\,;n]\!] :\ a_i = 0$

La famille est donc libre et ainsi :

$$r + n - r' \leq n$$

Donc :

$$r \leq r'$$

Un raisonnement analogue se fait en considérant la famille $(X'_1, .. X'_r, X_{r+1}, \dots, X_n)$ ce qui conduit à :

$$r \leq r'$$

Donc :

$$r = r'$$

En appliquant ce résultat à la forme quadratique $-Q$, on obtient :

$$s = s'$$

2) Algorithme de Gauss pour l'obtention de la signature :

Considérons l'écriture d'une forme quadratique dans la base canonique de $\mathbb{E}$:

$$Q(X) = \sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]} a_{ij}\, x_i\, x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, {x_i}^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

Considérons deux cas :

1er cas : Il existe au moins un terme a_{ii} non nul par exemple, sans nuire à la généralité, a_{11}

Alors :

$$Q(X) = a_{11}\, {x_1}^2 + x_1 \sum_{j=2}^{n} a_{1j}\, x_j + \sum_{i=2}^{n} a_{ii}\, {x_i}^2 + 2 \sum_{2\leq i<j\leq n} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

$$Q(X) = a_{11} \left(x_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}}\, x_j \right)^2 + Q'(x_2, \dots, x_n)$$

où Q' est une forme quadratique définie sur $(x_2, \dots, x_n)$.

On pose alors si $a_{11} > 0$:

$$L'_1(X) = \sqrt{a_{11}} \left(x_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}}\, x_j \right)$$

Et on a :

$$Q(X) = \left(L_1(X)\right)^2 + Q'(x_2, \dots, x_n)$$

Et si $a_{11} < 0$:

$$L'_1(X) = -\sqrt{a_{11}} \left(x_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}}\, x_j \right)$$

Et on a :

$$Q(X) = -\left(L_1(X)\right)^2 + Q'(x_2, \dots, x_n)$$

2ème cas : Tous les termes a_{ii} sont nuls. On considère alors un terme a_{ij} non nul, on peut supposer par exemple a_{12}.

Alors :

$$Q(X) = 2\, a_{12}\, x_1\, x_2 + 2\, x_1 \sum_{j=3}^{n} a_{1j}\, x_j \;\; 2\, x_2 \sum_{j=3}^{n} a_{2j}\, x_j + 2 \sum_{3\leq i<j\leq n} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

Donc Q se met sous la forme :

$$Q(X) = 2\left(a_{12}\,x_1 + \sum_{j=3}^{n} a_{2j}\,x_j\right)\left(x_2 + \sum_{j=3}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{12}}\,x_j\right) + Q'(x_3, \dots, x_n)$$

où Q' est une forme quadratique définie sur $(x_3, \dots, x_n)$.

On pose alors :

$$L'_1(X) = 2\left(a_{12}\,x_1 + \sum_{j=3}^{n} a_{2j}\,x_j\right)$$

$$L'_2(X) = x_2 + \sum_{j=3}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{12}}\,x_j$$

On a alors :

$$L'_1(X)\,L'_2(X) = \frac{1}{4}\left(L'_1(X) + L'_2(X)\right)^2 - \frac{1}{4}\left(L'_1(X) - L'_2(X)\right)^2$$

Posons :

$$L_1(X) = \frac{1}{2}\left(L'_1(X) + L'_2(X)\right)$$

$$L_2(X) = \frac{1}{2}\left(L'_1(X) - L'_2(X)\right)$$

Alors :

$$Q(X) = \left(L_1(X)\right)^2 - \left(L_2(X)\right)^2 + +Q'(x_3, \dots, x_n)$$

En réitérant ce procédé, on parvient à une décomposition de Sylvester.