Décomposition d'un espace vectoriel en somme de sous espaces stables pour un endomorphisme

Enoncé de l'exercice

Soit un espace vectoriel E de dimension finie et un endomorphisme *u* tel qu'il existe deux éléments *a* et *b* de son corps K associé vérifiant :

$$\boldsymbol{u^2 + a\,u + b\,I = 0}$$

où I désigne l'endomorphisme identité et 0 l'endomorphisme nul.

On suppose de plus que le polynôme $P(\lambda) = \boldsymbol{\lambda^2 + a\,\lambda + b}$ n'a pas de racines dans le corps K.

Le but de l'exercice est de montrer que la dimension de E ne peut être que paire puis qu'on peut trouver une base dans laquelle la matrice de u s'exprime sous forme d'une succession de blocs carrés d'ordre 2 de la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{b} \\ \mathbf{1} & -\boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

Démarche

1) **Cas où $\mathbf{dim}(\boldsymbol{E}) = \mathbf{1}$**

Soit x_0 un vecteur non nul de E. Alors :

$$\exists\, \lambda\ \in K : u(x_0) = \lambda\, x_0$$

On en déduit :

$$u^2(x_0) = \lambda^2\, x_0$$

Puis :

$$\lambda^2\, x_0 + a\,\lambda\, x_0 + b\, x_0 = 0$$

Soit :

$$(\lambda^2 + a\,\lambda + b)\,x_0 = \vec{0}$$

Or $x_0 \neq \vec{0}$ donc :

$$\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0$$

Ce qui est absurde.

Un espace vectoriel de dimension 1 ne peut donc présenter les caractéristiques énoncées.

2) Cas où $\dim(E) = 2$

Soit x_0 un vecteur non nul de E. Alors si on suppose :

$$\exists\,\lambda \in K : u(x_0) = \lambda\,x_0$$

On aboutit par la démarche précédente à une contradiction. On en déduit que $\big(x_0\,;\,u(x_0)\big)$ forme une partie libre donc une base de E.

Or :

$$\begin{cases} u(x_0) = 0\,x_0 + 1\,u(x_0) \\ u\big(u(x_0)\big) = -b\,x_0 - a\,u(x_0) \end{cases}$$

Dans cette base, la matrice de u est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$

3) Cas où $\dim(E) > 2$

Soit x_0 un vecteur non nul de E, alors, selon le raisonnement précédent, $\big(x_0\,;\,u(x_0)\big)$ forme une partie libre F_0 de E qui est de plus stable par u.

Soit x_1 un vecteur qui n'est pas dans F_0, montrons que $\big(x_0\,;\,u(x_0)\,;\,x_1\,;\,u(x_1)\big)$ forme une partie libre F_1 de E stable par u.

En effet, supposons :

$$\exists\,(f_0\,;\,\lambda) \in F_0 \times K : u(x_1) = f_0 + \lambda\,x_1$$

Alors en appliquant l'endomorphisme u à la relation, il vient :

$$u^2(x_1) = u(f_0) + \lambda\, u(x_1) = u(f_0) + \lambda\,(f_0 + \lambda\, x_1) = u(f_0) + \lambda\, f_0 + \lambda^2\, x_1$$

Or u vérifie en x_1 :

$$u^2(x_1) + a\, u(x_1) + b\, x_1 = \vec{0}$$

Donc :

$$(u(f_0) + \lambda\, f_0 + \lambda^2\, x_1) + a\,(f_0 + \lambda\, x_1) + b\, x_1 = \vec{0}$$

Soit :

$$(\lambda^2 + a\,\lambda + b)\, x_1 = -\,u(f_0) - (\lambda + a)\, f_0$$

Comme : $\lambda^2 + a\,\lambda + b \neq 0$ et que le second membre est dans F_0, car ce dernier est stable par u, on en déduit :

$$x_1 \in F_0$$

Ce qui est contradictoire.

Donc $\left(x_0\,;\, u(x_0)\,;\, x_1\,;\, u(x_1)\right)$ est une partie libre, ce qui interdit à E d'avoir pour dimension 3.

Notons alors : $F_1 = Vect\left(x_0\,;\; u(x_0)\,;\; x_1\,;\; u(x_1)\right)$. Nous avons :

$$\begin{cases} u(x_0) = 0\, x_0 + 1\, u(x_0) + 0\, x_1 + 0\, u(x_1) \\ u\left(u(x_0)\right) = -b\, x_0 - a\, u(x_0) + 0\, x_1 + 0\, u(x_1) \\ u(x_1) = 0\, x_0 + 0\, u(x_0) + 0\, x_1 + 1\, u(x_1) \\ u\left(u(x_1)\right) = 0\, x_0 + 0\, u(x_0) - b\, x_1 - a\, u(x_1) \end{cases}$$

F_1 est donc stable par u et la matrice de l'endomorphisme restreint à F_1 dans cette base est alors :

$$\begin{pmatrix} 0 & -b & 0 & 0 \\ 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

Elle est donc formée de deux blocs d'ordre 2 sur la diagonale.

Supposons alors avoir déterminé pour p > 0 une partie libre de la forme :

$\left(x_0\ ;\ u(x_0)\ ;\ x_1\ ;\ u(x_1)\ ; \dots x_{p-1}\ ; u\left(x_{p-1}\right)\right)$

Deux cas peuvent se présenter :

1er cas : $\mathbf{dim}(\boldsymbol{E}) = \mathbf{2}\ \boldsymbol{p}$

Alors $\left(x_0\ ;\ u(x_0)\ ;\ x_1\ ;\ u(x_1)\ ; \dots x_{p-1}\ ; u\left(x_{p-1}\right)\right)$ est une base de E et la matrice de u dans cette base est formée de p blocs diagonaux de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$

2ème cas : $\mathbf{dim}(\boldsymbol{E}) > \mathbf{2}\ \boldsymbol{p}$

Posons alors :

$$F_{p-1} = Vect\left(x_0\ ;\ u(x_0)\ ;\ x_1\ ;\ u(x_1)\ ; \dots x_{p-1}\ ; u\left(x_{p-1}\right)\right)$$

Et soit x_p un vecteur de E qui n'est pas dans F_{p-1}. Montrons alors que $\left(x_0\ ;\ u(x_0)\ ;\ x_1\ ;\ u(x_1)\ ; \dots x_{p-1}\ ; u\left(x_{p-1}\right)\ ;\ x_p\ ; u\left(x_p\right)\right)$ est une base de E. Il suffit pour cela de calquer la démonstration précédente en montrant qu'on ne peut trouver f_{p-1}dans F_{p-1} et λ dans K tels que :

$$u\left(x_p\right) = f_{p-1} + \lambda\, x_{p-1}$$

Conclusion :

On en déduit que la dimension de E ne peut pas être impaire et en réitérant le procédé jusqu'à se trouver dans le premier cas, on en déduit que E possède une base de la forme :

$$\left(\boldsymbol{x_0}\ ;\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x_0})\ ;\ \boldsymbol{x_1}\ ;\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x_1})\ ; \dots \boldsymbol{x_{p-1}}\ ; \boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{x_{p-1}}\right)\right)$$

La matrice de u dans cette base est donc bien constituée de p blocs diagonaux de la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{b} \\ \mathbf{1} & -\boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$