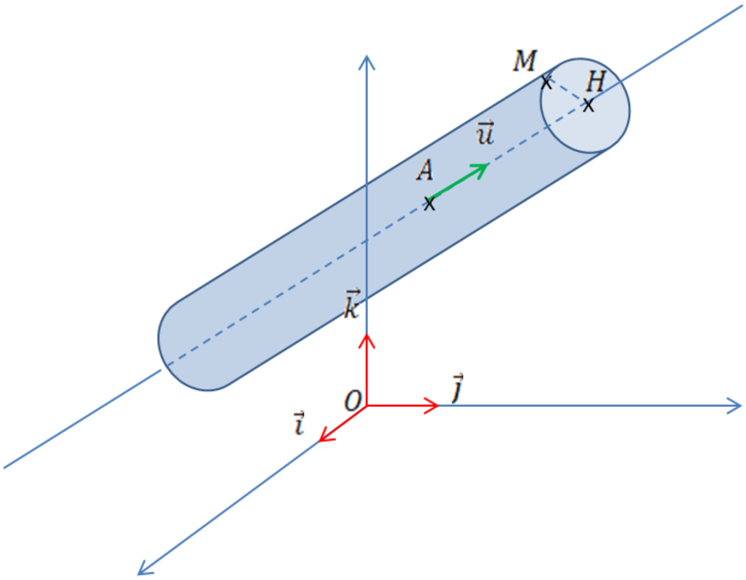
Equation d'un cylindre

Enoncé :

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

1) Déterminer une équation cartésienne d'un cylindre $\mathcal{C}$ d'axe $(A, \vec{u})$ et de rayon R



Conseils méthodologiques :

- Désigner par $M(x, y, z)$ un point quelconque du cylindre
- Désigner par H son projeté orthogonal sur l'axe du cylindre
- Exprimer AH^2 à l'aide de $A, M, \vec{u}$ et du produit scalaire
- En déduire HM^2 puis l'équation cherchée

Application :

$$A(0,0,1), \quad \vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, R = 1$$

2) Identifier deux paramètres permettant de repérer un point M sur le cylindre précédent
3) En déduire des équations paramétriques de ce cylindre

Conseils méthodologiques :

- Définir un repère orthonormé $(A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ où $\vec{K}$ est colinéaire à $\vec{u}$, plus adapté au cylindre
- Décrire M par deux paramètres adéquats dans ce repère
- En déduire des équations paramétriques

<u>Solution</u> :

1) Nous avons :

$$\overrightarrow{AH} = \left(\overrightarrow{AM} \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right) \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

donc :

$$AH^2 = \left(\overrightarrow{AM} \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)^2$$

On en déduit d'après le théorème de Pythagore :

$$HM^2 = AM^2 - AH^2 = AM^2 - \left(\overrightarrow{AM} \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)^2$$

D'où :

$$M \in \mathcal{C} \iff HM^2 = R^2$$

Une équation cartésienne sera obtenue en écrivant :

$$\boxed{AM^2 - \left(\overrightarrow{AM} \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)^2 = R^2}$$

Application :

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$AM^2 = x^2 + y^2 + (z-1)^2$$

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z-1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z-1)$$

L'équation est donc :

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 - \frac{1}{3}\,(x+y+z-1)^2 = 1$$

Soit :

$$3\,(x^2 + y^2 + z^2 - 2\,z + 1) \\ - (x^2 + y^2 + z^2 + 2\,x\,y + 2\,x\,z + 2\,y\,z - 2\,x - 2\,y - 2\,z + 1) = 3$$

Finalement, en passant tout à gauche :

$$\boxed{2\,x^2 + 2\,y^2 + 2\,z^2 - 2\,x\,y - 2\,x\,z - 2\,y\,z + 2\,x + 2\,y - 4\,z - 1 = 0}$$

2)

$$\vec{K} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Cherchons un vecteur $\vec{v}$, par exemple dans le plan $(\vec{J}, \vec{k})$, et orthogonal à $\vec{u}$ soit

$$\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$$

La condition d'orthogonalité s'écrit :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \times 1 + 1 \times 1 + z \times 1 = 0$$

Soit :

$$z = -1$$

donc :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons alors prendre :

$$\vec{I} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Afin d'obtenir une base orthonormée directe, reste à définir :

$$\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I}$$

Or :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

D'où :

$$\vec{J}\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

Il est alors aisé de décrire M dans le nouveau repère par deux paramètres θ, Z tels que :

$$\overrightarrow{AM} = cos(\theta)\,\vec{I} + sin(\theta)\,\vec{J} + Z\,\vec{K}$$

où θ est une mesure de l'angle $(\vec{I}, \overrightarrow{HM})$ dans le plan $(\vec{I}, \vec{J})$ orienté par $\vec{K}$

Des équations paramétriques s'en déduisent :

$$\begin{cases} x = \frac{-2}{\sqrt{6}}\,sin(\theta) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,Z \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\,cos(\theta) + \frac{1}{\sqrt{6}}\,sin(\theta) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,Z \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}}\,Z \end{cases}$$