

# ***Transformations réversibles-cycle de Carnot***

## **I Transformation quasi-statique**

### **Définition générale :**

Une transformation quasi-statique d'un système est une transformation idéalisée (donc irréalisable en pratique) infiniment lente de telle sorte qu'on puisse considérer le système à tout instant dans un état d'équilibre.

On peut prendre l'exemple d'un gaz enfermé dans une enceinte et que l'on comprime infiniment lentement en déplaçant un piston.

### **Cas du gaz parfait :**

Voyons alors comment évaluer la chaleur échangée par un système constitué par un gaz parfait, le long d'un chemin de transformation, qui est une suite d'états d'équilibre.

L'échange de chaleur infinitésimal entre deux états successifs infiniment proches est :

$$\delta Q = dU + P dV$$

Sachant :

$$P V = n R T$$

$$dU = \frac{n R}{\gamma - 1} dT$$

Soit :

$$\delta Q = \frac{n R}{\gamma - 1} dT + n R T \frac{dV}{V}$$

La chaleur totale échangée au cours d'une transformation faisant passer  $n$  mole de gaz parfait d'un état 1 de paramètres macroscopiques  $(P_1, V_1, T_1)$  à un état 2 de paramètres  $(P_2, V_2, T_2)$  sera alors :

$$Q = \int_{1 \rightarrow 2} \delta Q$$

Or cette quantité dépend du chemin suivi. Il n'y a qu'à penser à un gaz enfermé dans une enceinte de volume constant calorifugée, que l'on peut transformer d'un état d'équilibre initial à un état d'équilibre final par apport de travail ou bien de chaleur (ce qui a fondé d'ailleurs le principe d'équivalence travail chaleur).

Retenons donc bien :

**Tant le travail échangé que la chaleur dépend du chemin de transformation suivi, que ce soit pour une transformation quelconque ou une transformation quasi-statique.**

Maintenant, si on divise la chaleur élémentaire échangée par un gaz parfait au cours d'une transformation quasi-statique, par la température  $T$ , nous avons :

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{n R}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} + n R \frac{dV}{V}$$

Soit :

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{n R}{\gamma - 1} d \ln(T) + n R d(\ln(V))$$

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{n R}{\gamma - 1} d (\ln(T) + (\gamma - 1) \ln(V))$$

Donc :

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{nR}{\gamma - 1} d \left( \text{Ln}(T V^{(\gamma-1)}) \right) = d \left( \frac{nR}{\gamma - 1} \text{Ln}(T V^{(\gamma-1)}) \right)$$

Et par intégration le long d'un chemin de transformation quasi-statique, que nous noterons  $1 \rightarrow 2$

$$\int_{1 \rightarrow 2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{1 \rightarrow 2} d \left( \frac{nR}{\gamma - 1} \text{Ln}(T V^{(\gamma-1)}) \right) = \frac{nR}{\gamma - 1} \text{Ln}(T_2 V_2^{(\gamma-1)}) - \frac{nR}{\gamma - 1} \text{Ln}(T_1 V_1^{(\gamma-1)})$$

Cette quantité intégrale apparaît donc comme étant indépendante du chemin de transformation quasi-statique suivi, mais seulement des états initiaux et finaux de la transformation. Elle amène à définir pour un gaz parfait, une fonction  $S$  appelée entropie.

$$S = \frac{nR}{\gamma - 1} \text{Ln}(T V^{(\gamma-1)})$$

Ou sous forme différentielle :

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

D'un point de vue mathématique, l'échange de chaleur infinitésimal (on dit encore élémentaire) au cours d'une transformation faisant varier, à partir d'un état d'équilibre, les paramètres d'état du système de façon infinitésimale, par exemple de  $dT$  et  $dV$ , si ces paramètres sont la température  $T$  et le volume  $V$ , est qualifiée de forme différentielle et se présente sous la forme, avec les paramètres précédents :

$$\delta Q(T, V) = f(T, V) dT + g(T, V) dV$$

où, pour le gaz parfait, nous avons vu :

$$f(T, V) = \frac{n R}{\gamma - 1}$$

$$g(T, V) = \frac{n R T}{V}$$

Ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial V} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial T} = \frac{n R}{V}$$

Les dérivées croisées sont donc distinctes, ce qui, du point de vue mathématique, montre que  $\delta Q$  n'est pas la différentielle d'une fonction du couple  $(T, V)$ . On dit que ce n'est pas une différentielle exacte (ou totale) bien qu'on la qualifie de forme différentielle.

En revanche si on divise  $\delta Q$  par  $T$ , l'expression devient une différentielle exacte, ce qui est la condition pour que son intégrale ne dépende pas du chemin suivi. On qualifie alors  $T$  de facteur intégrant.

### Cas d'une transformation adiabatique quasi-statique pour un gaz parfait

Si la transformation est **adiabatique** en plus d'être quasi-statique, alors  $\delta Q$  est nul le long du chemin de transformation et on a :

$$S_2 = S_1$$

Autrement dit, l'entropie du gaz à l'état final est égale à l'entropie à l'état initial.

La transformation adiabatique quasi-statique est dite **isentropique**.

Dans ce cas

$$T_2 V_2^{(\gamma-1)} = T_1 V_1^{(\gamma-1)}$$

Nous retiendrons donc :

Au cours d'une transformation adiabatique quasi-statique, nous avons, en tout état d'équilibre du chemin de la transformation :

$$T V^{(\gamma-1)} = \text{constante}$$

Mais la loi des gaz parfaits montre que :

$$\frac{P V}{n R} V^{(\gamma-1)} = \text{constante}$$

Donc :

$$P V^\gamma = \text{constante}$$

Mais également :

$$T \left( \frac{n R T}{P} \right)^{(\gamma-1)} = \text{constante}$$

Soit :

$$T^\gamma P^{(1-\gamma)} = \text{constante}$$

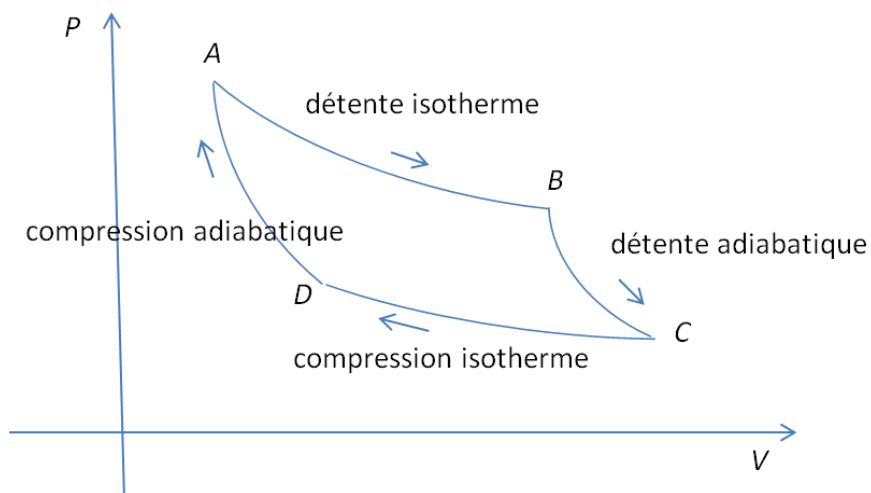
## **II Mesure de $\gamma$ par la méthode de Clément Desormes**

### III Le cycle de Carnot

Le principe du cycle de Carnot consiste à imaginer une transformation quasi-statique travaillant avec deux sources de chaleur, une dite **source chaude**, à la température  $T_1$ , l'autre dite **source froide**, à la température  $T_2$ , l'objectif étant de produire un travail à partir de chaleur extraite à la source chaude et de chaleur donnée à la source froide.

La transformation subie par le fluide doit en outre être cyclique, c'est-à-dire le ramener dans le même état macroscopique après un cycle.

Carnot a imaginé ce cycle pour un gaz parfait et l'a décomposé en quatre transformations, dont la succession des états d'équilibre se représente dans un diagramme pression fonction du volume, appelé **diagramme de Clapeyron**.

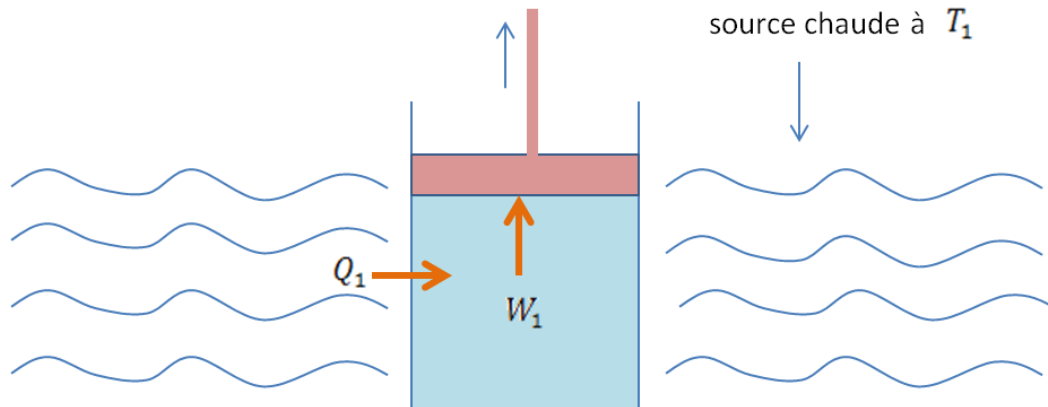


Cycle réversible de Carnot- moteur thermique

Partons d'un point du cycle, le point A par exemple, et détaillons les transformations subies par le gaz, en imaginant un processus expérimental traduisant ce cycle.

### Etape 1 du cycle : détente isotherme à la température $T_1$ de la source chaude

Imaginons que le gaz soit enfermé dans une enceinte munie d'un piston mobile, lequel pourra permettre au gaz d'échanger du travail avec le milieu extérieur.



Afin de démarrer le cycle, imaginons que l'enceinte soit initialement plongée dans une source chaude à la température  $T_1$ , le piston étant maintenu dans sa position par une butée, afin d'empêcher le gaz de se détendre.

Libérons la butée et imaginons que le piston soit relié à un système mécanique de très grande inertie, de telle sorte que le gaz ne puisse se détendre que très lentement, restant ainsi à chaque instant quasiment dans un état d'équilibre.

En se détendant, le gaz déplace un piston et fournit un travail au milieu extérieur sans modifier sa température. Notons que cela implique que les parois de l'enceinte laissent aisément passer de la chaleur venant de la source chaude (parois métalliques par exemple).

Stoppons alors la détente du gaz à l'aide d'une butée, lorsque ce dernier atteint un volume  $V_B$ .

Au cours de cette transformation, qui fait passer le gaz, de manière isotherme, de l'état macroscopique  $(P_A ; V_A ; T_1)$  à l'état  $(P_B ; V_B ; T_1)$ , le gaz échange une chaleur  $Q_1 > 0$  (le signe positif indique qu'il la reçoit) et un travail  $W_1 < 0$  (le signe moins traduit qu'il cède du travail au piston).

Or l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépendant que de sa température, il n'y a pas de variation d'énergie interne au cours de cette transformation. Nous avons donc :



$$W_1 + Q_1 = 0$$

L'intégralité de la chaleur prélevée sur la source chaude par le gaz est donc transformée par ce dernier en travail sur le piston.

Le travail  $W_1$  se calcule en utilisant :

$$W_1 = \int_{A \rightarrow B} -P dV = \int_{A \rightarrow B} -\frac{n R T_1}{V} dV = -n R T_1 [\ln(V)]_A^B$$

Soit :

$$W_1 = -n R T_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) < 0$$

Soit :

$$Q_1 = n R T_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) > 0$$

### **Etape 2 du cycle : détente adiabatique**

Imaginons qu'à l'instant où le gaz a atteint le volume  $V_B$ , nous puissions envelopper l'enceinte d'un matériau isolant thermiquement, de telle sorte qu'il ne puisse plus échanger de chaleur avec le milieu extérieur (gaz dans une enceinte calorifugée).

Le gaz étant encore, par sa température haute, à une pression plus forte que la pression extérieure, peut continuer à se détendre en libérant du travail sur le piston, mais ce, sans aucun échange de chaleur avec le milieu extérieur.

Le travail  $W_2$  échangé au cours de cette transformation peut se calculer par :

$$W_2 = \int_{B \rightarrow C} -P dV$$

Mais il est plus intéressant de le calculer en écrivant qu'il est égal à la variation d'énergie interne du gaz soit :

$$W_2 = n C_V \Delta T = \frac{n R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) < 0$$

De plus nous avons vu, pour une transformation adiabatique quasi-statique, que nous avons :

$$T V^{\gamma-1} = \text{constante}$$

Il en résulte :

$$T_2 V_C^{\gamma-1} = T_1 V_B^{\gamma-1}$$

On pourrait alors penser à ce stade qu'on a inventé une machine permettant de transformer de la chaleur en travail et fonctionnant avec une source unique. Eh bien non ! Car une fois le gaz détendu, il n'est plus à même de fournir à nouveau du travail. Il faut pour cela le ramener dans sa position initiale, ce qui va rendre nécessaire de le comprimer à nouveau en réutilisant une partie du travail qu'il a fourni et l'emploi d'une source froide. Voyons cela avec la suite du cycle.

### **Étape 3 du cycle : compression isotherme à la température $T_2$ de la source froide**

Imaginons que nous enlevions, à la fin de la transformation précédente, l'enveloppe de l'enceinte, pour la rendre à nouveau perméable à la chaleur, et que nous plongeons l'enceinte dans la source froide à la même température  $T_2$ .

Imaginons alors que le milieu extérieur comprime à nouveau lentement le gaz en lui fournissant un travail que ce dernier transfère en chaleur à la source froide, et que nous stoppons la compression lorsque le gaz atteint un volume  $V_D$  tel que, par une transformation adiabatique, on puisse rejoindre le point A.

L'énergie interne du gaz ne variant pas au cours de la transformation isotherme, nous avons alors la relation entre le travail  $W_3$  et la chaleur  $Q_3$  :

$$W_3 + Q_3 = 0$$

Le même calcul que pour la transformation isotherme précédente conduit alors à :

$$W_3 = -n R T_2 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = n R T_2 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right) > 0$$

Soit :

$$Q_3 = -n R T_2 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right) < 0$$

Le cycle peut alors s'achever par une compression adiabatique quasi-statique.

#### **Etape 4 du cycle : compression adiabatique quasi-statique**

Imaginons qu'à l'instant où le gaz a atteint le volume  $V_D$ , nous puissions à nouveau envelopper l'enceinte d'un matériau isolant thermiquement et laissons le milieu extérieur fournir du travail au gaz via le piston.

Le travail  $W_4$  échangé au cours de cette transformation peut se calculer par :

$$W_4 = \int_{D \rightarrow A} -P dV$$

Mais il est plus intéressant de le calculer en écrivant qu'il est égal à la variation d'énergie interne du gaz soit :

$$W_4 = n C_V \Delta T = \frac{n R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2) < 0$$

De plus nous avons vu, pour une transformation adiabatique quasi-statique, que nous avons :

$$T V^{\gamma-1} = \text{constante}$$

Il en résulte :

$$T_1 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_D^{\gamma-1}$$

Nous avons donc réalisé un cycle de transformation dans lequel le travail total échangé par le gaz avec le milieu extérieur est :

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = -n R T_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + n R T_2 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)$$

Or nous avons les relations des transformations adiabatiques donnent :

$$\frac{T_1 V_B^{\gamma-1}}{T_1 V_A^{\gamma-1}} = \frac{T_2 V_C^{\gamma-1}}{T_2 V_D^{\gamma-1}}$$

Soit :

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

Nous en déduisons le travail :

$$W = -n R (T_1 - T_2) \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Ce travail ne dépend que des températures des sources et du volume initial et final de la transformation isotherme avec la source chaude.

Or la chaleur prélevée à la source chaude est :

$$Q_1 = n R T_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Nous en déduisons le rendement de cette machine (appelée encore efficacité énergétique) :

$$r = \frac{\text{travail fourni par le gaz}}{\text{Chaleur captée par le gaz}} = \frac{|W|}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Quelle est alors l'interprétation de ce rendement d'un point de vue pratique ?

Nous avons vu au chapitre concernant le premier principe, que la compression lente d'un gaz parfait nécessitait un travail moindre que la compression rapide, pour amener le gaz d'un même état initial à un même état final.

Les transformations quasi-statiques, impossibles à réaliser dans la pratique, mais dont on peut s'approcher, constituent alors des transformations qui sont les plus économes en travail pour passer d'un état à un autre. Ce sont des transformations qui préservent au mieux les énergies macroscopiques (mécaniques et potentielles). Ainsi, gonfler un pneu de manière lente économise du travail musculaire, alors que le faire de manière rapide produit plus de chaleur et donc transforme plus d'énergie chimique en énergie microscopique désordonnée (chaleur).

Or les causes s'opposant à l'évolution quasi-statique des transformations sont les chocs et les frottements dus à des différences de paramètres macroscopiques importants entre systèmes qui interagissent (pression, température, vitesse).

**Le cycle de Carnot moteur, celui que nous venons de présenter et qui fournit un travail au milieu extérieur, est alors un cycle transformation effectuée de façon quasi-statique, donc théorique et irréalisable en pratique, mais il donne la limite en rendement de tout cycle ditherme réel fonctionnant, pour un fluide donné, avec une source chaude à  $T_1$  et une source froide à  $T_2$ .**

**Le théorème de Carnot stipule en effet que tout cycle moteur ditherme réel aura un rendement strictement inférieur au cycle moteur de Carnot fonctionnant avec les mêmes sources**

Un bon exemple est la production d'énergie nucléaire, pour laquelle, au cours d'un cycle, un fluide, l'eau du circuit secondaire, capte de la chaleur à une source chaude, le circuit

primaire, de température aux environs de  $300^{\circ} C$ , fournit un travail à des turbines pour le fonctionnement d'alternateurs et en absorbe de pompes pour assurer sa circulation, mais en quantité moindre, donc échange un travail total négatif (on dit cède du travail) avec le milieu extérieur, et cède de la chaleur à l'eau issue d'un fleuve de température autour de  $20^{\circ} C$ .

Or, en intégrant les pertes de la conversion d'énergie électrique en énergie mécanique, on peut mesurer le rendement réel défini par :

$$\eta = \frac{\text{Energie produite par cycle}}{\text{chaleur reçue par cycle}}$$

Et on trouve :

$$\eta = 0,33$$

A peu de choses près, la chaleur reçue par l'eau du circuit secondaire au cours d'un cycle correspond à l'énergie issue au cours de ce cycle par la fission des atomes d'uranium 235.

Comparons alors ce rendement réel au rendement théorique d'un cycle de Carnot moteur qui fonctionnerait avec une source chaude à  $300^{\circ} C = 573 K$  et une source froide à  $20^{\circ} C = 293 K$  :

$$\eta_{th} = \frac{573 - 293}{573} = 0,49$$

Le rendement du cycle réel est donc bien strictement inférieur au rendement du cycle théorique

### **Réversibilité du cycle de Carnot**

Le cycle de Carnot peut être exécuté dans l'autre sens, avec la même expérience de pensée.

Dans ce cas, toutes les valeurs de chaleurs et de travaux échangés doivent être changées de signe.

Le gaz absorbe alors le travail  $W$  et cède la chaleur  $|Q_1|$  à la source chaude en ayant prélevé la chaleur  $Q_3$  à la source froide.

On dit que le cycle est **réversible**, ce qui est la caractéristique des transformations quasi-statiques.

On adopte alors deux points de vue :

- **La machine frigorifique :**

Dans ce cas, les deux quantités considérées sont la chaleur prélevée à la source froide (l'intérieur d'un réfrigérateur par exemple) et le travail fourni (par le compresseur par exemple)

On définit alors le **coefficient de performance frigorifique** théorique par :

$$COP_{th} = \frac{\text{chaleur prélevée à la source froide}}{\text{Travail}} = \frac{Q_3}{W} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

Là encore, selon le théorème de Carnot, toute machine frigorifique ditherme, aura un coefficient de performance frigorifique strictement inférieur à celui, ci-dessus, du cycle théorique de Carnot fonctionnant avec les mêmes sources.

- **La pompe à chaleur :**

Dans ce cas, les deux quantités considérées sont la chaleur transférée à la source chaude (la pièce à chauffer par exemple) et le travail fourni (par le compresseur par exemple)

On définit alors le **coefficient de performance thermique** théorique par :

$$COP_{th} = \frac{\text{chaleur transférée à la source chaude}}{\text{Travail}} = \frac{|Q_1|}{W} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

**Là encore, selon le théorème de Carnot, toute pompe à chaleur ditherme aura un coefficient de performance thermique strictement inférieur à celui ci-dessus, du cycle de Carnot fonctionnant avec les mêmes sources.**

Les pompes à chaleur distribuées commercialement ont des coefficients de performance qui dépendent des conditions d'utilisation, à savoir, température souhaitée dans la pièce à chauffer et température de la source froide sur laquelle sont prélevées les calories.

S'il s'agit d'une pompe à chaleur air-air, les deux sources sont l'air de la pièce et l'air extérieur. S'il s'agit d'une pompe à chaleur air-eau, les deux sources sont l'air de la pièce et l'eau d'un puits par exemple, ou d'une nappe phréatique, qui se maintient autour d'une température quasi-constante toute l'année (environ 12° C pour un puits en région parisienne).

Une pompe à chaleur air-air aura donc un coefficient de performance énergétique moins bon qu'une pompe à chaleur air-eau en condition d'utilisation hivernale, et qui pourra tendre vers 1 si les températures sont bien en dessous de zéro, rendant la pompe à chaleur probablement pas plus efficace qu'un convecteur électrique.

Voici les coefficients de performance énergétique théoriques dans deux situations :

- Source chaude = pièce chauffée à 20° C, source froide = eau d'un puits à 12° C

$$COP_{th} = \frac{293}{293 - 285} = 37$$

- Source chaude = pièce chauffée à 20° C, source froide = air extérieur à 0° C

$$COP_{th} = \frac{293}{293 - 273} = 15$$

Les valeurs moyennes affichées par les constructeurs de pompes à chaleur se situent entre 3 et 4 dans des régions comme le bassin parisien « pas trop froides », ce qui est bien en dessous des valeurs théoriques. Mais ne perdons pas de vue que les cycles théoriques sont



irréalisables en pratique, ils supposeraient disposer d'un temps infini pour effectuer un cycle.

D'un point de vue concret, un coefficient de 4 par exemple, signifie que qu'à partir d'1 *KWh* d'électricité fournie par le compresseur, on pourra récupérer 4 *KWh* de chaleur, alors qu'il faudrait 4 *KWh* d'électricité pour obtenir la même chaleur à partir d'un convecteur électrique. La facture électrique est ainsi divisée par 4, ce qui fait tout l'intérêt des pompes à chaleur, en comparaison avec le chauffage électrique direct.