

Les nombres premiers-crible d'Eratosthène

Les nombres premiers sont en quelque sorte les atomes du monde des nombres. Ils jouent un rôle essentiel dans de nombreux domaines des mathématiques et sont très utilisés dans des applications comme la cryptographie.

Définition

Un nombre premier est un nombre qui ne peut pas se diviser par un plus petit que lui mais qui n'est pas 1.

Une autre façon de le définir plus précisément, c'est de dire que c'est un nombre ayant exactement deux diviseurs distincts, ce qui exclut de ce fait 1.

Voyons ainsi lesquels des premiers nombres sont premiers, en faisant apparaître leurs décompositions en produit de deux facteurs excluant celles triviale où figure 1, faisant ainsi la liste de leurs diviseurs :

Nombres	décompositions	diviseurs	premier
1	-	1	non
2	-	1 ; 2	oui
3	-	1 ; 3	oui
4	2×2	1 ; 2 ; 4	non
5	-	1 ; 5	oui
6	2×3	1 ; 2 ; 3 ; 6	non
7		1 ; 7	oui
8	2×4	1 ; 2 ; 4 ; 8	non

Cette méthode est néanmoins laborieuse. Si nous souhaitons déterminer tous les nombres premiers jusqu'à 100, mais ce pourrait être jusqu'à un nombre quelconque, il existe une technique efficace appelée **crible d'Eratosthène**. Présentons là.

Disposons pour cela tous les nombres en tableau (la disposition est essentielle pour une bonne efficacité visuelle, sinon la méthode peut être employée pour un traitement informatique).

La première étape consiste à éliminer 1 en le faisant apparaître en rouge et relever 2 en le faisant apparaître en vert.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

La deuxième étape consiste à éliminer tous les multiples de 2. Notez que cela se visualise facilement car ce sont des colonnes, d'où l'importance de la disposition.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

A ce stade, nous pouvons être assurés du fait que le nombre 3 suivant 2 est premier car il n'a pas été éliminé et donc il n'a pas de diviseur plus petit que lui.

La troisième étape consiste à relever ce nombre 3 en vert puis à éliminer tous ses multiples.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Notez là encore que, de par la disposition adoptée, les multiples de 3 s'éliminent en diagonales montantes.

Le premier nombre non éliminé qui suit 3 est 5. Il est donc premier car il ne peut pas avoir de diviseur strictement inférieur sinon il aurait été éliminé. Nous le relevons donc en vert et éliminons les multiples de 5, c'est-à-dire, la colonne du 5 car celle du 10 a déjà été éliminée.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Le nombre suivant 5 et non éliminé est 7. Il est donc premier. Nous le relevons en vert et éliminons ses multiples.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Le premier nombre non éliminé suivant 7 est 11. Il est donc premier et là on s'arrête. Pourquoi me direz-vous ? Parce que dans les multiples de 11, seuls sont à éliminer les multiples à partir de 11×11 , car 2×11 a déjà été éliminé en temps que multiple de 2, 3×11 en temps que multiple de 3, 4×11 en temps que multiple de 2 car 4 est multiple de 2, etc jusqu'à 10×11 .

Or $11 \times 11 = 121 > 100$, donc aucun des multiples de 11 n'est plus à éliminer dans le tableau.

Le premier nombre non éliminé suivant 11 est alors 13. Il est donc premier et le même raisonnement s'applique de proche en proche pour affirmer que tous les nombres non éliminés du tableau sont premiers.

Au final, les nombres relevés en vert forment l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 100. Nous ne conseillons que trop au lecteur désireux de devenir un vrai scientifique de les apprendre par cœur au même titre que les tables de multiplication.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Alors plutôt que de faire des Sudokus en vacances (Ca finit par tourner en rond et on n'apprend plus rien, comme dans les jeux vidéos), essayer de déterminer pendant vos vacances par cette méthode les nombres premiers jusqu'à 200, puis jusqu'à 300, jusqu'à 1000 pour les plus courageux et les petits caïds de la programmation pourront tenter jusqu'à des milliards et plus.