Courbes planes paramétrées en coordonnées polaires

Dans toute la suite, on considère un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et une courbe plane $\mathcal{C}$ de ce plan.

I Définition

Un paramétrage en coordonnées polaires de cette courbe est la donnée d'une fonction $\boldsymbol{\rho(\theta)}$ telle que :

$$\boldsymbol{\mathcal{C} = \left\{ M \in \mathcal{P} :\ \exists\, \theta \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OM} = \ \rho(\theta)\ (cos(\theta)\ \vec{\imath} + sin(\theta)\ \vec{\jmath}) \right\}}$$

En posant :

$$\vec{u}(\theta) = cos(\theta)\ \vec{\imath} + sin(\theta)$$

l'ensemble est donc celui des points vérifiant :

$$\overrightarrow{OM} = \rho(\theta)\ \vec{u}(\theta)$$

Un paramétrage cartésien de cet ensemble est donc :

$$\boldsymbol{\begin{cases} x = \rho(\theta)\ cos(\theta) \\ y = \rho(\theta)\ sin(\theta) \end{cases}}$$

A noter cependant que la fonction $\rho(\theta)$ pouvant être négative, le couple $(\rho(\theta), \theta)$ n'est pas nécessairement un couple de coordonnées polaires du point M. Ce n'est le cas que lorsque $\rho(\theta) > 0$.

Pour plus de commodités, on omet la variable θ dans les descriptions et on fait intervenir le vecteur directement perpendiculaire à $\vec{u}$ qui est :

$$\boldsymbol{\vec{v} = -sin(\theta)\ \vec{\imath} + cos(\theta)\ \vec{\jmath} = \frac{d\vec{u}}{d\theta}}$$

et qui vérifie donc:

$$\boldsymbol{\frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\vec{u}}$$

On posera pour la suite :

$$\vec{F}(\theta) = \rho(\theta)\ (cos(\theta)\ \vec{\imath} + sin(\theta)\ \vec{\jmath})$$

et on se placera dans le cas où dans le cas où $\vec{F}(\theta)$ est deux fois dérivables.

II Etude de la courbe

L'étude de déroule en plusieurs étapes :

1ère étape : Détermination du domaine de définition puis du domaine d'étude en tenant compte de symétries ou de périodicité éventuelles pour la fonction $\boldsymbol{\rho(\theta)}$:

- Si $\exists\, k \in \mathbb{Z} : \rho(\theta + 2\,k\,\pi) = \rho(\theta)$

alors : $\overrightarrow{OM(\theta + 2\,k\,\pi)} = \rho(\theta + 2\,k\,\pi)\,\vec{u}(\theta + 2\,k\,\pi) = \rho(\theta)\ \vec{u}(\theta) = \overrightarrow{OM(\theta)}$

On obtient ainsi toute la courbe sur un intervalle de longueur $2\,|k|\,\pi$

- Si $\exists\, k \in \mathbb{Z} : \rho(\theta + 2\,k\,\pi) = -\rho(\theta)$

alors : $\overrightarrow{OM(\theta + 2\,k\,\pi)} = \rho(\theta + 2\,k\,\pi)\,\vec{u}(\theta + 2\,k\,\pi) = -\rho(\theta)\ \vec{u}(\theta) = -\overrightarrow{OM(\theta)}$

La courbe est symétrique par rapport à O et il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur $2\,|k|\,\pi$

- Si $\exists\, k \in \mathbb{Z} : \rho(\theta + (2\,k+1)\,\pi) = \rho(\theta)$

alors :

$$\overrightarrow{OM(\theta + (2\,k+1)\,\pi)} = \rho(\theta + (2\,k+1)\,\pi)\,\vec{u}(\theta + (2\,k+1)\,\pi) = -\rho(\theta)\ \vec{u}(\theta) = -\overrightarrow{OM(\theta)}$$

La courbe est symétrique par rapport à O et il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur $|2\,k+1|\,\pi$

- Si $\rho(\theta + \alpha) = \rho(\theta)$

alors la courbe est invariante par rotation de centre O et d'angle α et il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur $|\alpha|$

- Si $\rho(\theta + \alpha) = -\rho(\theta)$

alors la courbe est invariante par rotation de centre O et d'angle $\alpha + \pi$ et il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur $|\alpha|$

- Si $\rho(\alpha - \theta) = -\rho(\theta)$

alors la courbe est symétrique par rapport à la droite passant par O et d'angle $\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$ et il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur $|\alpha|$

2ème étape : Détermination de la tangente en tout point et étude des points stationnaires.

La dérivée de $\vec{F}$ est :

$$\vec{F}' = \rho'\vec{u} + \rho\,\vec{v}$$

a) Etude des points stationnaires

$(\vec{u},\vec{v})$ formant une base, nous avons :

$$\vec{F}' = \vec{0} \Leftrightarrow \rho' = \rho = 0$$

Les points stationnaires étant les points où $\vec{F}'$ est le vecteur nul, seule l'origine O peut être un point stationnaire, c'est-à-dire, compte tenu de la continuité de ρ, dans la situation suivante:

$$\boxed{\lim_{\theta\to\theta_0} \rho(\theta) = 0}$$

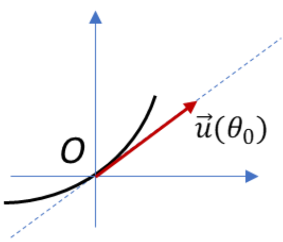
auquel cas :

$$\lim_{\theta\to\theta_0} \frac{1}{\rho(\theta)} \overrightarrow{M(\theta_0)M(\theta)} = \lim_{\theta\to\theta_0} \frac{1}{\rho(\theta)} \overrightarrow{OM(\theta)} = \lim_{\theta\to\theta_0} \vec{u}(\theta) = \vec{u}(\theta_0)$$

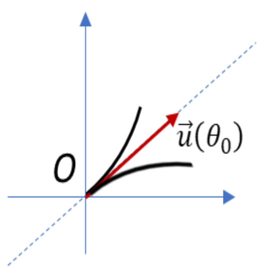
Un vecteur non nul de la corde joignant $M(\theta_0) = O$ à $M(\theta)$ tend donc vers le vecteur $\vec{u}(\theta_0)$.

La tangente en un point stationnaire O de paramètre θ_0 est donc la droite $\left(O, \vec{u}(\theta_0)\right)$ et l'allure locale est donnée par le signe de ρ au voisinage de θ_0 :

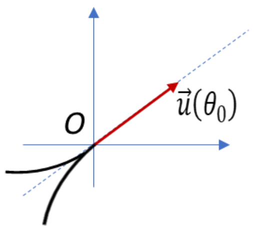
- **Si ρ s'annule en θ_0 en changeant de signe, l'allure de la courbe est ordinaire**



- **Si ρ s'annule en θ_0 et $\rho(\theta) > 0$ sur $]\theta_0 - \alpha, \theta_0 + \alpha[\setminus\{\theta_0\}$ la courbe présente en O un point de rebroussement de 1ère espèce d'allure :**



- **Si ρ s'annule en θ_0 et $\rho(\theta) < 0$ sur $]\theta_0 - \alpha, \theta_0 + \alpha[\setminus\{\theta_0\}$ la courbe présente en O un point de rebroussement de 1ère espèce d'allure :**



b) Etude des points non stationnaires :

En un point $M(\theta)$ où $\vec{F}'$ ne s'annule pas, la tangente est la droite $\left(M(\theta), \vec{F}'(\theta)\right)$ et si on pose :

$$\beta = (\vec{u}, \vec{F}')$$

alors :

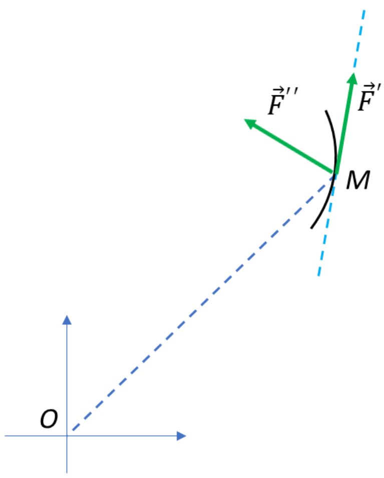
$$Tan(\beta) = \frac{\rho}{\rho'}$$

3ème étape : Etude des variations et tableau de variation de ρ

4ème étape : Etude de la concavité :

En un point régulier (non stationnaire) la tangente $\left(M(\theta), \vec{F}'(\theta)\right)$ sépare le plan en deux demi-plans. Si $\vec{F}'(\theta)$ *et* $\vec{F}''(\theta)$ ne sont pas colinéaires, $\vec{F}''(\theta)$ pointe dans l'un de ces demi-plans. On cherche à savoir si l'origine O se situe dans ce dernier (on dira que la concavité est du côté de O) ou pas. Notons pour cela :

La concavité est du côté de O si et seulement si $(\vec{F}', \vec{F}'')$ et $(\vec{F}', \overrightarrow{MO})$ sont de même orientation comme illustré sur la figure :



Or :

$$\vec{F}'' = (\rho'' - \rho)\,\vec{u} + 2\,\rho'\vec{v}$$

et :

$$Det_{(\vec{u},\vec{v})}(\vec{F}',\vec{F}'') = \begin{vmatrix} \rho' & \rho'' - \rho \\ \rho & 2\,\rho' \end{vmatrix} = 2\,{\rho'}^2 + \rho^2 - \rho\,\rho''$$

$$Det_{(\vec{u},\vec{v})}(\vec{F}',\overrightarrow{MO}) = \begin{vmatrix} \rho' & -\rho \\ \rho & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 > 0$$

Donc la concavité est du côté de $\boldsymbol{O}$ si et seulement si :

$$\boldsymbol{2\,{\rho'}^2 + \rho^2 - \rho\,\rho'' > 0}$$

Et du côté opposé à $\boldsymbol{O}$ si et seulement si :

$$\boldsymbol{2\,{\rho'}^2 + \rho^2 - \rho\,\rho'' < 0}$$

Il y a donc un point d'inflexion si et seulement si $\boldsymbol{2\,{\rho'}^2 + \rho^2 - \rho\,\rho''}$ s'annule en changeant de signe.

Notons cependant que :

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''\right) = \frac{2\,{\rho'}^2 + \rho^2 - \rho\,\rho''}{\rho^4}$$

Donc de façon plus pratique , nous aurons :

$$\boldsymbol{2\,{\rho'}^2 + \rho^2 - \rho\,\rho'' > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''\right) > 0}$$

5ème étape : Etude des branches infinies asymptotes à une droite

La courbe présente une branche infinie dans la situation suivante :

$$\lim_{\theta \to \theta_0} \left\|\overrightarrow{OM(\theta)}\right\| = +\infty$$

Donc :

$$\boldsymbol{\lim_{\theta \to \theta_0} \rho(\theta) = +\infty\ (ou - \infty)}$$

A noter dans ce cas :

$$\lim_{\theta \to \theta_0} \vec{u}(\theta) = \vec{u}(\theta_0)$$

Donc la branche infinie a une direction asymptotique de vecteur $\vec{u}(\theta_0)$, ce qui est une condition préalable à l'existence d'une droite asymptote.

Pour savoir si une droite Δ de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha)$ est asymptote à la branche infinie, on note que l'équation d'une telle droite dans le repère $\left(O,\vec{u}(\alpha),\vec{v}(\alpha)\right)$ est de la forme :

$$Y = b$$

et que dans ce repère :

$$\overrightarrow{OM(\theta)} = \left(\rho(\theta)\,\vec{u}(\theta)\cdot\vec{u}(\alpha)\right)\vec{u}(\alpha) + \left(\rho(\theta)\,\vec{u}(\theta)\cdot\vec{v}(\alpha)\right)\vec{v}(\alpha)$$

Autrement dit, l'ordonnée $Y(\theta)$ de $M(\theta)$ est :

$$Y(\theta) = \rho(\theta)\,\vec{u}(\theta)\cdot\vec{v}(\alpha) = \rho(\theta)\,(cos(\theta)\,\vec{\imath} + sin(\theta)\,\vec{\jmath})\cdot(-sin(\alpha)\,\vec{\imath} + cos(\alpha)\,\vec{\jmath})$$

Soit :

$$Y(\theta) = \rho(\theta)\left(sin(\theta)\,cos(\alpha) - cos(\theta)\,sin(\alpha)\right) = \rho(\theta)\,sin(\theta-\alpha)$$

On pouvait le voir aussi plus rapidement en notant que :

$$\left(\vec{u}(\alpha),\overrightarrow{OM(\theta)}\right) = \left(\vec{u}(\alpha),\vec{u}(\theta)\right) = \theta - \alpha$$

et Δ est asymptote à la branche infinie si et seulement si :

$$\lim_{\theta\to\theta_0} Y(\theta) = b$$

Or si $\theta_0 \neq \alpha + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$:

$$sin(\theta_0 - \alpha) \neq 0$$

et :

$$\lim_{\theta\to\theta_0} |Y(\theta)| = \lim_{\theta\to\theta_0} |\rho(\theta)\,sin(\theta-\alpha)| = +\infty$$

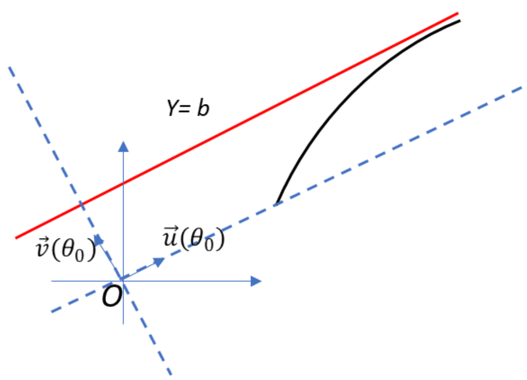
Donc Δ ne peut pas être asymptote à la branche infinie. Il en résulte :

La courbe présente une branche infinie asymptote à une droite Δ en $\boldsymbol{\theta_0}$ si et seulement si :

$$\boldsymbol{\lim_{\theta\to\theta_0} \rho(\theta) = +\infty\ (ou - \infty)}$$

$$\boldsymbol{\lim_{\theta\to\theta_0} \rho(\theta)\ sin(\theta - \theta_0) = b}$$

auquel cas, Δ a pour équation $\boldsymbol{Y = b}$ dans le repère $\boldsymbol{\left(O,\vec{u}(\theta_0),\vec{v}(\theta_0)\right)}$



Il existe d'autres types de courbes-asymptote. Citons le cas d'un cercle asymptote de centre O et de rayon r dans la situation suivante :

$$\lim_{\theta \to +\infty} \rho(\theta) = r$$

et également d'autres types de branches infinies comme la spirale rencontrée dans la situation suivante :

$$\lim_{\theta \to +\infty} \rho(\theta) = +\infty$$

6$^{\text{ème}}$ étape : Etude des points doubles

Il peut arriver qu'une portion de courbe ait une intersection avec une autre portion de courbe. L'intersection est alors appelée point double. Cela se produit dans l'une ou l'autre des deux situations suivantes :

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} :\ \rho(\theta + 2\,k\,\pi) = \rho(\theta) \text{ ou } \exists\, k \in \mathbb{Z} :\ \rho(\theta + (2\,k+1)\,\pi) = -\rho(\theta)$$

7$^{\text{ème}}$ étape : Tracé dans un repère orthonormé

III Exemple :

Soit à étudier la courbe d'équation polaire :

$$\rho = \frac{sin(\theta)}{sin(\theta) - cos(\theta)}$$

1) Domaine d'étude :

$$\rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$$

La courbe est donc symétrique par rapport à O et il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur π comme $[0, \pi]$. Sur cet intervalle, on étudie la définition en résolvant :

$$sin(\theta) - cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

L'intervalle d'étude est donc $\left[\theta, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ sur lequel la fonction ρ est dérivable à tout ordre.

2) Points stationnaires

$$\rho = 0 \Leftrightarrow sin(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \; ou \; \theta = \pi$$

Allure :

En $\theta = 0$ ρ s'annule en changeant de signe. C'est un point à allure ordinaire. Il en va de même en π

3) Variations de ρ

$$\rho' = \frac{cos(\theta)\,\big(sin(\theta) - cos(\theta)\big) - sin(\theta)\,\big(cos(\theta) + sin(\theta)\big)}{\big(sin(\theta) - cos(\theta)\big)^2} = -\frac{1}{\big(sin(\theta) - cos(\theta)\big)^2} < 0$$

ρ est strictement décroissante sur $\left[\theta, \frac{\pi}{4}\right[$ et sur $\left]\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

4) Concavité :

$$\frac{1}{\rho} = 1 - \frac{cos(\theta)}{sin(\theta)}$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)' = \frac{1}{sin^2(\theta)}$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)'' = -\frac{2\,sin(\theta)cos(\theta)}{sin^4(\theta)} = -\frac{2\,cos(\theta)}{sin^3(\theta)}$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''\right) = \frac{sin(\theta) - cos(\theta)}{sin(\theta)}\left(\frac{sin(\theta) - cos(\theta)}{sin(\theta)} - \frac{2\,cos(\theta)}{sin^3(\theta)}\right)$$

$$= \frac{\big(sin(\theta) - cos(\theta)\big)\,\Big(\big(sin(\theta) - cos(\theta)\big)sin^2(\theta) - 2\,cos(\theta)\Big)}{sin^4(\theta)}$$

qui est du signe du numérateur :

$$\big(sin(\theta) - cos(\theta)\big)\,\Big(\big(sin(\theta) - cos(\theta)\big)sin^2(\theta) - 2\,cos(\theta)\Big)$$

Toutefois comme le signe du facteur de droite de l’expression n’est pas si aisé à déterminer, on peut omettre cette étape.

5) Branche infinies :

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}^+} \rho(\theta) = +\infty$$

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}^-} \rho(\theta) = +\infty$$

La courbe présente donc deux branches infinies. Notons que :

$$sin(\theta) - cos(\theta) = \sqrt{2}\,sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

Ainsi :

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \rho(\theta)\,sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} = \frac{sin(\theta)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

La droite Δ d'équation$Y = \frac{1}{2}$ dans le repère $\left(O, \vec{u}\left(\frac{\pi}{4}\right), \vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ est asymptote aux deux branches infinies. La position peut également être étudiée :

Pour $0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\,\pi}{4} < \theta \leq \ \pi$ on a :

$$Y(\theta) = \frac{sin(\theta)}{\sqrt{2}} < \frac{1}{2}$$

La courbe est donc sous l'asymptote dans le repère $\left(O, \vec{u}\left(\frac{\pi}{4}\right), \vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Pour $\theta = \frac{3\pi}{4}$ on a :

$$Y(\theta) = \frac{1}{2}$$

La courbe rencontre donc l'asymptote

Pour $\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{3\,\pi}{4}$ on a :

$$Y(\theta) > \frac{1}{2}$$

La courbe est donc au-dessus de l'asymptote dans le repère $\left(O, \vec{u}\left(\frac{\pi}{4}\right), \vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

6) <u>points doubles</u>

La portion de courbe ne peut pas en avoir car l'intervalle d'étude est de longueur inférieure à $2\,\pi$

7) <u>Tracé </u>On peut le faire à la main, mais un traceur de courbes comme Geogebra fera bien mieux l'affaire : la portion étudiée est en trait plein bleu, la symétrique en pointillé bleu.