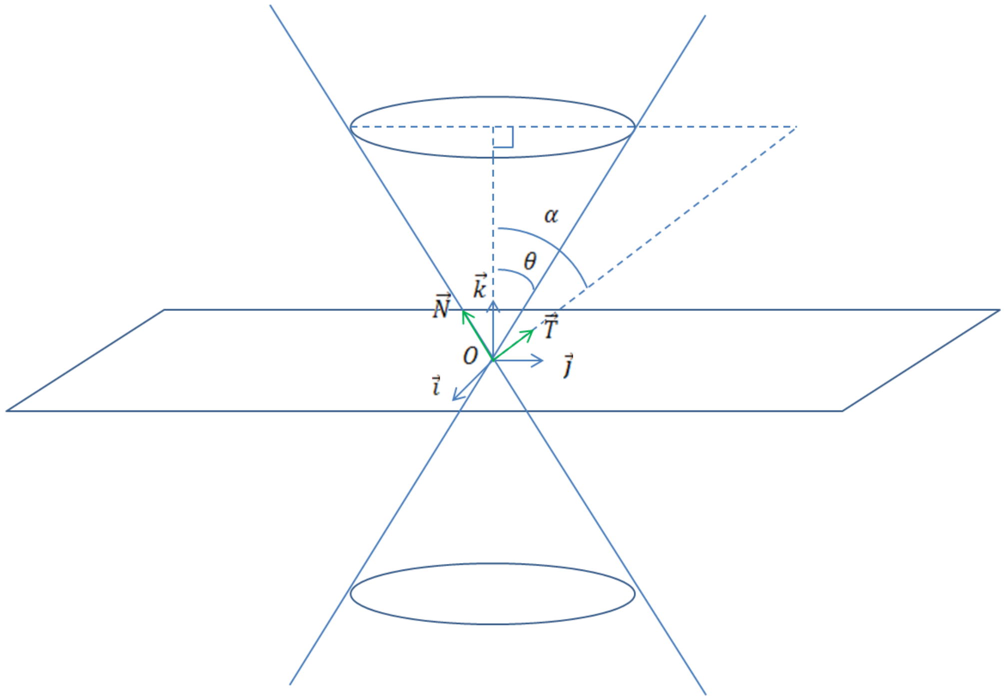
Coupe d'un cône par un plan

Considérons un cône d'angle θ, de sommet O, d'axe (O,z). Il admet dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une équation de la forme :

$$x^2 + y^2 = (tan(\theta)\, z)^2$$



Coupons ce cône par un plan $\mathcal{P}$. Si le repère est choisi de telle sorte qu'un vecteur normal du plan est un vecteur du plan $(O,\vec{j},\vec{k})$, alors, en désignant par α une mesure de l'angle que fait l'axe du cône avec le plan de coupe (on pourra se limiter sans nuire à la généralité à $\alpha \in [0;\pi/2]$), un vecteur de ce plan et du plan $(O,\vec{j},\vec{k})$ est :

$$\vec{T} = sin(\alpha)\,\vec{j} + cos(\alpha)\,\vec{k}$$

Un vecteur normal au plan de coupe est alors :

$$\vec{N} = -cos(\alpha)\,\vec{j} + sin(\alpha)\,\vec{k}$$

Un premier cas trivial est celui où $\alpha = \pi/2$ soit $\vec{N} = \vec{k}$. Dans ce cas la courbe $\mathcal{C}$ intersection du cône et du plan de coupe est un cercle. Traitons les autres cas moins triviaux.

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point du plan de coupe. Une équation cartésienne de ce plan est alors :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{N} = 0$$

$$\Leftrightarrow -cos(\alpha)\ (y - y_A) + sin(\alpha)(z - y_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = tan(\alpha)\ z + y_A - tan(\alpha)\ y_A$$

Posons :

$$c = y_A - tan(\alpha)\ y_A$$

L'équation est donc de la forme :

$$\boxed{y = tan(\alpha)\ z + c}$$

c est un paramètre pouvant prendre n'importe quelle valeur réelle et s'interprétant géométriquement par le fait que la droite formée par l'intersection du plan de coupe avec le plan (O, y, z) a pour équation $y = c$ dans ce dernier plan.

Une équation cartésienne de la courbe intersection du cône et du plan de coupe est alors :

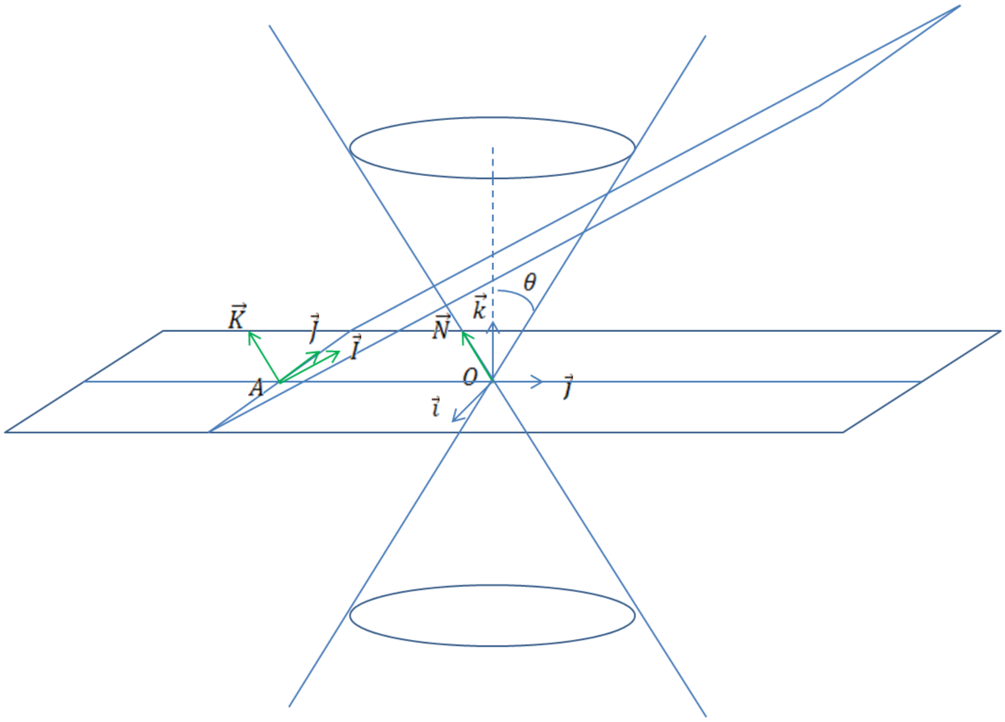
$$x^2 + (tan(\alpha)\ z + c)^2 = (tan(\theta)\ z)^2$$

Soit :

$$\boxed{x^2 + \left(tan^2(\alpha) - tan^2(\theta)\right) z^2 + 2\ c\ tan(\alpha)\ z + c^2 = 0}$$

Effectuons un changement de repère $\left(A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\right)$ où :

$$\begin{cases} \vec{I} = \vec{T} \\ \vec{J} = -\vec{\imath} \\ \vec{K} = \vec{N} \end{cases}$$



En écrivant :

$$\overrightarrow{AM} = X\,\vec{I} + Y\,\vec{J} + Z\,\vec{K} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} - c\,\vec{\jmath}$$

Et en identifiant matriciellement les composantes sur $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

$$X\begin{pmatrix} 0 \\ sin(\alpha) \\ cos(\alpha) \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + Z\begin{pmatrix} 0 \\ -cos(\alpha) \\ sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-c \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ sin(\alpha) & 0 & -cos(\alpha) \\ cos(\alpha) & 0 & sin(\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-c \\ z \end{pmatrix}$$

La matrice étant orthogonale son inverse est sa transposée. Ainsi :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -cos(\alpha) & sin(\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-c \\ z \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\boxed{\begin{cases} X = sin(\alpha)\,(y-c) + cos(\alpha)\,z \\ Y = -\ x \\ Z = -cos(\alpha)\,(y-c) + sin(\alpha)\,z \end{cases}}$$

Pour un point le la courbe $\mathcal{C}$ cela conduit à :

$$\begin{cases} X = sin(\alpha)\ tan(\alpha)\ z + cos(\alpha)\ z = \dfrac{1}{cos(\alpha)}\ z \\ Y = -\ x \\ Z = -cos(\alpha)\ tan(\alpha)\ z + sin(\alpha)\ z = 0 \end{cases}$$

On vérifie ainsi bien que $Z = 0$. Dans le plan de coupe, un point M de coordonnées (X, Y) dans le repère $\left(A, \vec{I}, \vec{J}\right)$ du plan est donc sur la courbe $\mathcal{C}$ si et seulement si il vérifie l'équation :

$$(-Y)^2 + \left(tan^2(\alpha) - tan^2(\theta)\right)(cos(\alpha)\ X)^2 + 2\ c\ tan(\alpha)\ cos(\alpha)\ X + c^2 = 0$$

Soit :

$$\boxed{cos^2(\alpha)\left(tan^2(\alpha) - tan^2(\theta)\right) X^2 + 2\ c\ sin(\alpha)\ \ X + Y^2 + c^2 = 0}$$

Or :

$$cos^2(\alpha)\left(tan^2(\alpha) - tan^2(\theta)\right) = cos^2(\alpha)\ \left(\left(1 + tan^2(\alpha)\right) - \left(1 + tan^2(\theta)\right)\right)$$

$$= cos^2(\alpha)\ \left(\frac{1}{cos^2(\alpha)} - \frac{1}{cos^2(\theta)}\right) = \frac{cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)}{cos^2(\theta)}$$

L'équation devient :

$$\frac{cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)}{cos^2(\theta)}\ X^2 + 2\ c\ sin(\alpha)\ \ X + Y^2 + c^2 = 0$$

Traitons d'abord le cas $\alpha \neq \theta$. On a alors :

$$X^2 + 2\ \frac{c\ sin(\alpha)\ cos^2(\theta)}{cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)}\ \ X + \frac{cos^2(\theta)}{cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)}\ (Y^2 + c^2) = 0$$

$$\left(X + \frac{c\ sin(\alpha)\ cos^2(\theta)}{cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)}\right)^2 + \frac{cos^2(\theta)\ Y^2}{cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)} + \frac{cos^2(\theta)\ c^2}{cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)} - \left(\frac{c\ sin(\alpha)\ cos^2(\theta)}{cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)}\right)^2 = 0$$

Or :

$$\left(\frac{c\ sin(\alpha)\ cos^2(\theta)}{cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)}\right)^2 - \frac{cos^2(\theta)\ c^2}{cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)}$$

$$= \frac{c^2\, sin^2(\alpha)\, cos^4(\theta) - cos^2(\theta)\, c^2\, \left(cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)\right)}{\left(cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)\right)^2}$$

$$= \frac{c^2\, cos^2(\theta)\, \left(sin^2(\alpha)\, cos^2(\theta) - cos^2(\theta) + cos^2(\alpha)\right)}{\left(cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)\right)^2}$$

$$= \frac{c^2\, sin^2(\theta)\, cos^2(\theta)\, cos^2(\alpha)}{\left(cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)\right)^2}$$

Posons :

$$\boxed{\boldsymbol{d = -\frac{c\, sin(\alpha)\, cos^2(\theta)}{cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)}}}$$

Et faisons le changement de repère par translation:

$$\begin{cases} X_1 = X - d \\ Y_1 = Y \end{cases}$$

L'équation devient dans le nouveau repère d'origine Ω

$$X_1{}^2 + \frac{cos^2(\theta)\, Y_1{}^2}{cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)} = \frac{c^2\, sin^2(\theta)\, cos^2(\theta)\, cos^2(\alpha)}{\left(cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)\right)^2}$$

Il existe alors un cas trivial, celui pour lequel $c = 0$. Dans ce cas, l'équation conduit, soit à un ensemble réduit au point O $(\alpha > \theta)$, soit à deux droites $(\alpha < \theta)$qui sont des génératrices du cône. Dans les autres cas l'équation devient :

$$\frac{\left(cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)\right)^2}{c^2\, sin^2(\theta)\, cos^2(\theta)\, cos^2(\alpha)} X_1{}^2 + \frac{\left(cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)\right)}{c^2\, sin^2(\theta)\, cos^2(\alpha)} Y_1{}^2 = 1$$

Posons :

Si $\boldsymbol{\theta \leq \alpha < \pi/2}$:

$$\boldsymbol{a = \frac{c\, sin(\theta)\, cos(\theta)\, cos(\alpha)}{cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)}}$$

$$\boldsymbol{b = \frac{c\, sin(\theta)\ \ cos(\alpha)}{\sqrt{cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)}}}$$

Si $\boldsymbol{0 \leq \alpha < \theta}$:

$$\boldsymbol{a = \frac{c\, sin(\theta)\, cos(\theta)\, cos(\alpha)}{cos^2(\alpha) - cos^2(\theta)}}$$

$$\boldsymbol{b = \frac{c\, sin(\theta)\ \ cos(\alpha)}{\sqrt{cos^2(\alpha) - cos^2(\theta)}}}$$

L'équation devient finalement selon les cas :

<u>1er cas</u> $\boldsymbol{\theta \le \alpha < \pi/2}$:

$$\boldsymbol{\frac{{X_1}^2}{a^2} + \frac{{Y_1}^2}{b^2} = 1}$$

Or :

$$\boldsymbol{\frac{b}{a} = \frac{c\, sin(\theta)\ \ cos(\alpha)}{\sqrt{cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)}}\ \frac{cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)}{c\, sin(\theta)\, cos(\theta)\, cos(\alpha)} = \frac{\sqrt{cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)}}{cos(\theta)}}$$

$$\boldsymbol{= \sqrt{1 - \left(\frac{cos(\alpha)}{cos(\theta)}\right)^2} < 1}$$

$\boldsymbol{C}$ est donc une ellipse de centre $\boldsymbol{\Omega}$ de demi grand axe $\boldsymbol{a}$ et demi petit axe $\boldsymbol{b}$

Les coordonnées (x, y, z) de Ω dans $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ vérifient

$$\begin{pmatrix} x \\ y - c \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ sin(\alpha) & 0 & -cos(\alpha) \\ cos(\alpha) & 0 & sin(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = c + d\, sin(\alpha) = c - \dfrac{c\, sin^2(\alpha)\, cos^2(\theta)}{cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)} = 0 \\ z = d\, cos(\alpha) = -\dfrac{c\, sin(\alpha)\, cos(\alpha)\, cos^2(\theta)}{cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)} \end{cases}$$

Soit :

$$\boldsymbol{\Omega\left(0, 0, -\frac{c\, sin(\alpha)\, cos(\alpha)\, cos^2(\theta)}{cos^2(\theta) - cos^2(\alpha)}\right)}$$

On note, comme attendu, que le centre de l'ellipse est bien sur l'axe (O, z)

<u>2</u>

<u>2ème cas</u> $\boldsymbol{0 \le \alpha < \theta}$:

$$\frac{{X_1}^2}{a^2} - \frac{{Y_1}^2}{b^2} = 1$$

$\mathcal{C}$ est donc une hyperbole de centre Ω d'asymptotes dans le repère $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$:

$$Y_1 = \frac{b}{a} X_1, \qquad Y_1 = -\frac{b}{a} X_1$$

avec :

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\theta)}\right)^2 - 1}$$

Les coordonnées (x, y, z) de Ω dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont les mêmes que dans le cas de l'ellipse, soit :

$$\Omega\left(0, 0, -\frac{c\, \sin(\alpha)\, \cos(\alpha)\, \cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta) - \cos^2(\alpha)}\right)$$

On note encore ici que le centre de l'hyperbole est bien sur l'axe (O, z)

Revenons sur le cas $\alpha = \theta$ l'équation devient :

$$2\, c\, \sin(\theta)\ X + Y^2 + c^2 = 0$$

Soit

$$X = -\frac{1}{2\, c\, \sin(\theta)}\, Y^2 - \frac{c}{2\, \sin(\theta)}$$

$\mathcal{C}$ est donc une parabole de centre Ω et d'axe $(\Omega, \vec{I})$

Ω est le point tel que :

$$\begin{cases} X = -\dfrac{c}{2\, \sin(\theta)} \\ Y = 0 \\ Z = 0 \end{cases}$$

Donc de coordonnées (x, y, z) dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ vérifiant

$$\begin{pmatrix} x \\ y-c \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ sin(\theta) & 0 & -cos(\theta) \\ cos(\theta) & 0 & sin(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{c}{2\,sin(\theta)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = c - \frac{c}{2} \\ z = -\frac{c\,cos(\theta)}{2\,sin(\theta)} \end{cases}$$

Soit :

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega\left(0, \frac{c}{2}, -\frac{c}{2}\,cotan(\theta)\right)}}$$