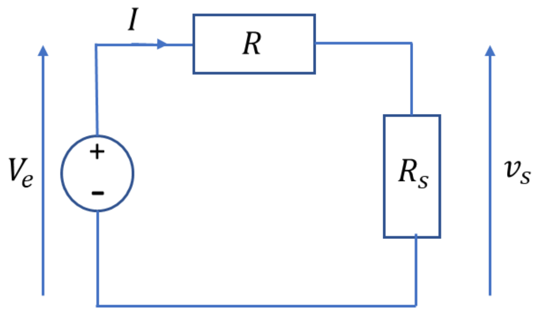
Système abaisseur de tension continue Buck

Objectif :

A partir d'un générateur de tension continue, produire une tension continue plus faible aux bornes d'un dipôle passif comme une résistance appelé charge .

1) Une première solution : le pont diviseur de tension



Le générateur de tension continue V_e (tension d'entrée) alimente la charge qui est un résistor de résistance R_s via une résistor de résistance R placé en série. La charge se trouve donc sous une tension de sortie :

$$v_s = \frac{R_s}{R + R_s} V_e$$

Inconvénients :

La tension délivrée dépend de la résistance de la charge

Le rendement énergétique n'est pas bon. En effet, faisons un bilan de puissance :

Puissance fournie par le générateur :

$$P_f = V_e I = (R + R_s) I^2$$

Puissance consommée par la charge (puissance utile) :

$$P_u = R_s I^2$$

Rendement du système :

$$\boxed{r = \frac{P_u}{P_f} = \frac{R_s}{R + R_s}}$$

Exemple d'application :

On souhaite alimenter un résistor de 10 Ω fonctionnant avec une tension nominale de 4,5 V à l'aide d'un générateur de tension continue 12 V. On alimente donc ce résistor via un autre de résistance R telle que :

$$\frac{10}{R + 10} = \frac{v_s}{V_e} = \frac{4{,}5}{12}$$

Soit :

$$R + 10 = \frac{12 \times 10}{4,5} = \frac{240}{9} = \frac{80}{3}$$

Donc :

$$R = \frac{80}{3} - 10 \approx 17\ \Omega$$

Le rendement est alors :

$$r = \frac{4,5}{12} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\ \%$$

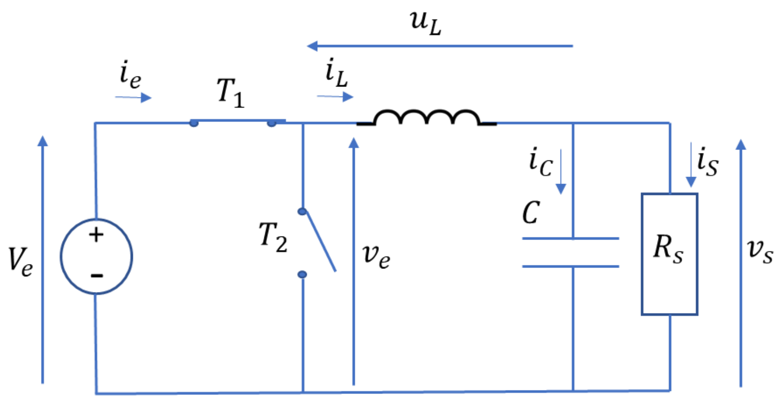
2) Une seconde solution plus avantageuse : Le convertisseur dévolteur Buck

Pour pallier aux inconvénients du dispositif précédent, il faut employer des dipôles qui ne dissipent pas d'énergie mais peuvent en stocker et en restituer. Ce sont les condensateurs et les bobines (selfs).

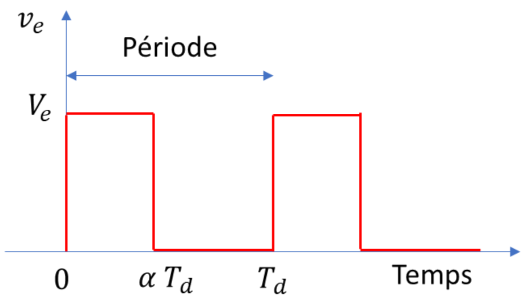
Un condensateur peut se charger et maintenir une tension pendant sa décharge aux bornes d'un résistor monté en parallèle.

Une bobine peut quant à elle opposer une tension au générateur chargé d'alimenter la charge, ce qui produit une tension moindre aux bornes de cette dernière. Voyons cela en détail et par le calcul.

Le principe est d'appliquer la tension d'entrée V_e de façon discontinue mais de façon périodique. Voici comment :



On utilise deux transistors T_1 et T_2 fonctionnant en mode interrupteur. Quand T_1 est fermé, T_2 est ouvert et vice versa de telle sorte que la tension d'entrée v_e du dipôle formé par la mise en série d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C mis en parallèle avec un résistor de résistance R_s (la charge qu'on veut alimenter) ait l'allure d'une tension périodique en créneau de période T_d de la forme :



La fraction de période pendant laquelle la tension v_e a la valeur constante non nulle V_e est notée α.

La période est très faible. La fréquence correspondante, appelée **fréquence de découpage** est de l'ordre de la dizaine de kilohertz donc la période de l'ordre de 1/10000 ème de seconde soit 1/10 de milliseconde.

Nous allons alors montrer qu'un régime permanent s'établit et déterminer dans ce régime, l'allure de la tension de sortie en fonction du temps sur une période.

Pour cela, on applique sur la $n - i\grave{e}me$ période de temps suivant la mise en marche du dispositif (T_1 fermé, T_2 ouvert) , la loi des mailles, la loi des nœuds ainsi que les lois des caractéristiques intensité-tension des dipôles :

Loi des mailles :

$$\boxed{v_e = u_L + v_s}$$

Loi des nœuds :

$$\boxed{i_L = i_C + i_s}$$

Lois caractéristiques des dipôles :

$$v_s = R_s\, i_s$$

$$u_L = L\, \frac{di_L}{dt}$$

$$i_C = C\, \frac{dv_S}{dt}$$

On en déduit :

$$v_e = L\, \frac{di_C}{dt} + L\, \frac{di_s}{dt} + v_s$$

Soit :

$$L\, C\, \frac{d^2 v_S}{dt^2} + \frac{L}{R_s}\, \frac{dv_s}{dt} + v_s = v_e$$

Et, en normalisant l'équation :

$$\frac{d^2 v_S}{dt^2} + \frac{1}{R_s\, C}\, \frac{dv_s}{dt} + \frac{1}{L\, C} v_s = \frac{1}{L\, C} v_e$$

On pose alors :

$$\boxed{2\,\lambda = \frac{1}{R_s\,C}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}}$$

L’équation devient :

$$\boxed{\frac{d^2 v_S}{dt^2} + 2\,\lambda\,\frac{dv_s}{dt} + {\omega_0}^2\,v_s = \frac{1}{L\,C} v_e}$$

C’est une équation différentielle classique , linéaire, du second ordre, à coefficients constants et à second membre constant. La solution générale est :

$$v_s = v_e + e^{-\lambda\,t}\left(A\,cos(\omega_0\,t) + B\,sin(\omega_0\,t)\right)$$

$$\frac{dv_s}{dt} = e^{-\lambda\,t}\left((-\lambda\,A + B\,\omega_0)\,cos(\omega_0\,t) + (-\lambda\,B - A\;\;\omega_0)\,sin(\omega_0\,t)\right)$$

Où A et B sont donnés par les conditions initiales :

$$\begin{cases} v_s(0) = v_e + A \\ \dfrac{dv_s}{dt}(0) = -\lambda\,A + B\,\omega_0 \end{cases}$$

Distinguons alors sur la $n - ième$ période les deux phases :

Première phase de durée $\alpha\,T_d$: L’origine des temps étant prise au début de cette phase, nous notons $v_{s,n}(0)$ la valeur de la tension en ce début de période. Nous avons alors v_e qui est constant de valeur V_e. Ainsi :

$$A = v_{s,n}(0) - V_e$$

$$B = \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{dv_{s,n}}{dt}(0) + \lambda\left(v_{s,n}(0) - V_e\right)\right)$$

D’où :

$$v_s = V_e + e^{-\lambda\,t}\left(\left(v_{s,n}(0) - V_e\right)cos(\omega_0\,t) + \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{dv_{s,n}}{dt}(0) + \lambda\left(v_{s,n}(0) - V_e\right)\right)sin(\omega_0\,t)\right)$$

Or $\omega_0\,t$ étant une quantité très proche de zéro, nous pouvons faire les approximations, à l’ordre 1 en t :

$$cos(\omega_0\,t) \approx 1, \qquad sin(\omega_0\,t) = \;\omega_0\,t$$

Ainsi :

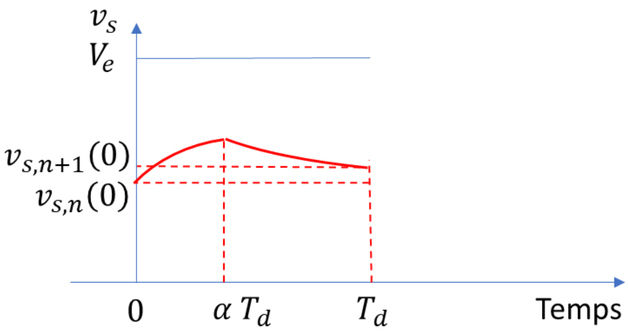
$$v_s = V_e + e^{-\lambda\,t}\left(\left(v_{s,n}(0) - V_e\right) + \left(\frac{dv_{s,n}}{dt}(0) + \lambda\left(v_{s,n}(0) - V_e\right)\right)t\right)$$

$$v_s = V_e + e^{-\lambda\,t}\left(\left(v_{s,n}(0) - V_e\right)(1 + \lambda\,t) + \frac{dv_{s,n}}{dt}(0)\,t\right)$$

Or sur la plage de temps $[0, \alpha\,T_d\,]$, t est très petit donc on peut encore faire l’approximation :

$$v_s = V_e - e^{-\lambda\, t}\left(V_e - v_{s,n}(0)\right)$$

Sachant, comme nous le vérifierons par la suite que la suite $v_{s,n}(0)$ est strictement croissante et inférieure à V_e, la fonction v_s est donc une fonction strictement croissante sur $[0, \alpha\, T_d\,]$ et strictement décroissante sur la phase suivante, d'allure :



Elle atteint donc en $t = \alpha\, T_d$ la valeur :

$$v_s(\alpha\, T_d\,) = V_e - e^{-\lambda\, \alpha\, T_d}\left(V_e - v_{s,n}(0)\right)$$

Sur la phase suivante de longueur $T_d - \alpha\, T_d = (1-\alpha)\, T_d$ la valeur en fin de phase, qui n'est autre que $v_{s,n+1}(0)$ s'obtient en remplaçant α par $1-\alpha$ et V_e par 0 dans la formule précédente. Ainsi :

$$v_{s,n+1}(0) = 0 - e^{-\lambda\,(1-\alpha)\,T_d}\left(0 - \left(V_e - e^{-\lambda\,\alpha\,T_d}\left(V_e - v_{s,n}(0)\right)\right)\right)$$

Soit :

$$v_{s,n+1}(0) = e^{-\lambda\, T_d}\, v_{s,n}(0) + \left(e^{-\lambda\,(1-\alpha)\,T_d} - e^{-\lambda\, T_d}\right) V_e$$

La suite $v_{s,n}(0)$ des valeurs de tension en début de période suit donc une progression arithmético-géométrique de raison $a = e^{-\lambda\, T_d}$ vérifiant $|a| < 1$. Donc elle converge vers une valeur limite $v_{s,L}(0)$ vérifiant :

$$v_{s,L}(0) = e^{-\lambda\, T_d}\, v_{s,L}(0) + \left(e^{-\lambda\,(1-\alpha)\,T_d} - e^{-\lambda\, T_d}\right) V_e$$

Soit :

$$v_{s,L}(0) = \frac{e^{-\lambda\,(1-\alpha)\,T_d} - e^{-\lambda\, T_d}}{1 - e^{-\lambda\, T_d}}\, V_e$$

Or en utilisant le développement limité en zéro à l'ordre 1 de la fonction exponentielle : $e^x = 1 + x$, on en déduit :

$$v_{s,L}(0) = \frac{(1 - \lambda\,(1-\alpha)\,T_d) - (1 - \lambda\, T_d)}{1 - (1 - \lambda\, T_d)}\, V_e$$

Soit finalement :

$$v_{s,L}(0) = \alpha\, V_e$$

Il s'établit donc bien un régime permanent dans lequel la tension de sortie v_s est continue et périodique avec une valeur en début de période égale à $\alpha\, V_e$.

Voyons si cette tension varie beaucoup sur cette période en régime permanent.

La valeur maximale est obtenue pour $t = \alpha\, T_d$ et vaut :

$$v_{s,max} = V_e - e^{-\lambda\,\alpha\,T_d}\ (V_e - \alpha\, V_e) = \left(1 - (1-\alpha)\, e^{-\lambda\,\alpha\,T_d}\right) V_e$$

Soit en utilisant le développement à l'ordre 1 de l'exponentielle en zéro :

$$v_{s,max} = \left(1 - (1-\alpha)\,(1 - \lambda\,\alpha\,T_d)\right) V_e$$

$$v_{s,max} = (\,\alpha + \lambda\,\alpha\,(1-\ \alpha)\,T_d)\,V_e$$

Et la valeur minimale est :

$$v_{s,min} = v_{s,L}(0) = \alpha\, V_e$$

Ainsi :

$$\frac{v_{s,max} - v_{s,min}}{v_{s,L}(0)} = \frac{\lambda\,\alpha\,(1-\ \alpha)\,T_d\,V_e}{\alpha\,V_e} = \lambda\,(1-\ \alpha)\,T_d$$

quantité tellement petite qu'elle justifie le fait que la tension de sortie soit considérée, en régime permanent, comme ayant une valeur constante égale à $\alpha\, V_e$ sur chaque période et que nous noterons V_s et qui en est également la valeur moyenne sur la période.

Analysons maintenant le fonctionnement de la bobine sur une période en régime permanent afin de bien en faire apparaitre me rôle :

On a :

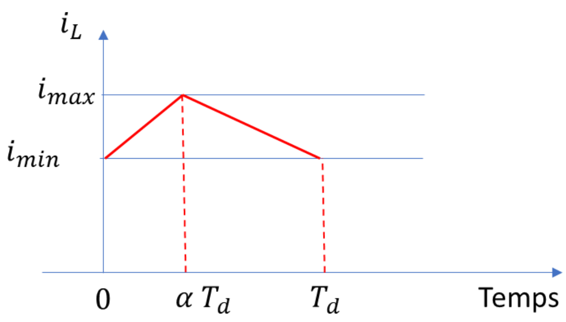
$$u_L = V_e - v_s$$

Soit :

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_e - v_s}{L} = \frac{V_e - \left(V_e - e^{-\lambda\,t}\,(V_e - \alpha\,V_e)\right)}{L}$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{e^{-\lambda\,t}\,(1-\alpha)}{L}\,V_e \approx \frac{(1-\alpha)}{L}\,V_e$$

i_L est donc strictement croissante et quasiment affine sur la première phase de la période et strictement décroissante et quasiment affine sur la seconde phase, d'où l'allure :



Notons I_L la valeur moyenne de i_L sur une période et notons I_C celle de i_C, I_S celle de i_S sur la même période toujours en régime permanent. Alors nous avons :

$$I_L = I_C + I_S$$

Or :

$$I_C = \frac{1}{T_d} \int_0^{T_d} C \ \frac{dv_s}{dt} \ dt = \frac{1}{T_d} \ C \left(v_s(T_d) - v_s(0) \right) = 0$$

Ainsi :

$$I_L = I_S = \frac{V_S}{R_S}$$

De plus, si on note $i_{L,max}$ et $i_{L,min}$ les valeurs maximale et minimale de i_L sur une période en régime permanent alors :

$$i_{L,max} - i_{L,min} = \int_0^{\alpha \, T_d} \frac{di_L}{dt} \ dt = \frac{(1-\alpha)}{L} \ V_e \ \alpha \ T_d$$

Cette quantité étant très petite devant I_L, on peut donc considérer **que l'inductance délivre un courant constant au dipôle formé du condensateur et du résistor en parallèle.**

Point de vue énergétique :

Le générateur, qui n'applique une tension sur une période que sur une durée $\alpha \ T_d$ fournit sur cette même période en régime permanent l'énergie :

$$E_f = V_e \ I_L \ \alpha \ T_d$$

La charge consomme sur la même période l'énergie :

$$E_u = R_s \ {I_S}^2 \ T_d$$

La bobine et le condensateur ont des énergies qui sont périodiques, elles ne consomment ni ne restituent d'énergie sur la même.

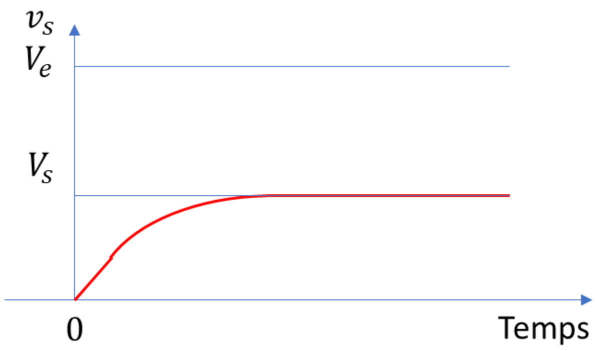
Le rendement du système est donc :

$$r = \frac{E_u}{E_f} = \frac{R_s \ {I_S}^2 \ T_d}{V_e \ I_L \ \alpha \ T_d} = \frac{R_S I_S}{V_e \ \ \alpha} = 1 = 100 \ \%$$

En fait il faut tenir compte de l'énergie consommée par les transistors servant d'interrupteur et le rendement réel avoisine les 95 %.

En résumé :

Lorsque l'on ferme l'interrupteur T_1 pour la première fois, la tension v_s se met à croître à chaque période et si on se place à une échelle de temps qui ignore les variations sur une période, elle a une variation qui a l'allure suivante :



où :

$$V_s = \alpha V_e$$

Et α est un nombre compris entre 0 et 1 qui ne dépend pas des caractéristiques de la charge.