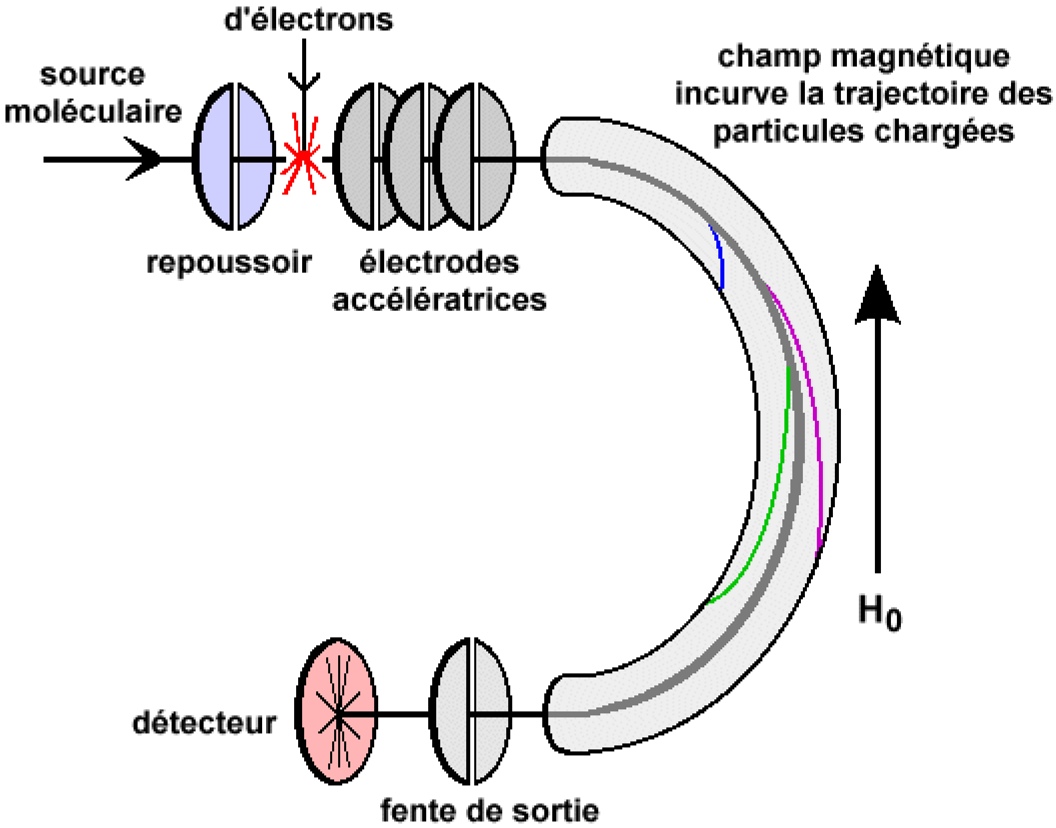
Contrôle AI2 -6 Juillet 2015

(Enseignant : Laurent Gry)

I Exercice 1 : Electromagnétisme : spectromètre de masse (10 points)

La technique de spectroscopie de masse est une technique permettant d'analyser la composition de molécules. Des molécules d'une même substance M sont ainsi envoyées en phase gazeuse dans une chambre où elles sont brisées en fragments et ionisées par bombardement électronique. Puis le faisceau d'ions est focalisé et accéléré entre des plaques accélératrices. Il entre alors dans une zone où règne un champ magnétique qui incurve sa trajectoire. L'énergie des électrons ayant bombardé le faisceau est telle que les fragments portent la charge élémentaire e mais des masses m différentes. Seuls les fragments ayant un rapport m/e adéquat peuvent atteindre un détecteur. L'intensité du faisceau détecté est alors mesurée.



Soit par exemple une molécule M de benzophénone que l'on cherche à identifier. On fait réagir par bombardement électronique cette molécule en phase gazeuse avec du méthane, générant un certain nombre d'ions de charge e formés sur cette molécule, ainsi que d'autres, selon le mécanisme suivant :

$$CH_4 + e^- \longrightarrow CH_4^{+\bullet} + 2e^-$$

$$CH_4^{+\bullet} + CH_4 \longrightarrow CH_5^+ + CH_3^{\bullet}$$

$$CH_5^+ + M \longrightarrow \underset{\text{ion moléculaire à M+1}}{MH^+} + CH_4$$

$$CH_5^+ + M \longrightarrow \underset{\text{ion moléculaire à M+16}}{MCH_4^{+\bullet}} + H^{\bullet}$$

En faisant varier la tension accélératrice, on peut faire apparaître des pics d'intensité correspondant aux différents rapports m/e des ions passés dans le détecteur dont ceux de la molécule à identifier. On en déduit la reconnaissance de cette dernière.

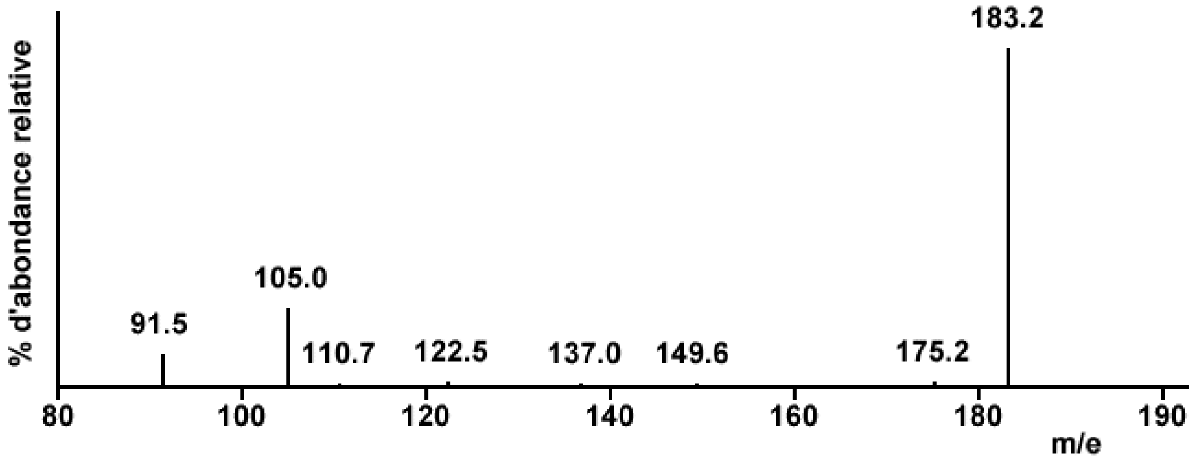


Figure 2. Spectre de masse de la benzophénone obtenu par ionisation chimique. L'ion moléculaire apparaissant à 183,2 m/e correspond à MH^+, puisque la masse molaire de cette substance est 182,2 g/mol.

<u>Etude théorique du principe de la spectroscopie</u> :

Nous allons nous intéresser à la molécule de benzophénone notée M, et à la trajectoire d'un ion MH^+ formé dans la chambre d'ionisation et entrant dans le système de séparation, formé d'une section d'accélération et d'une section de déviation circulaire.

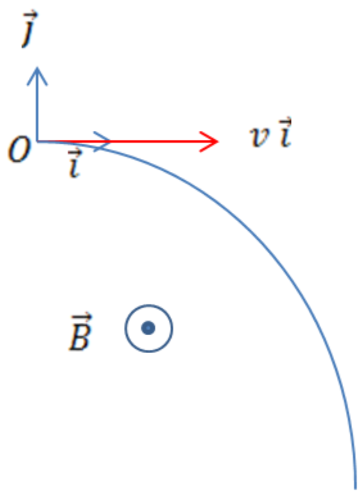
1) Accélération de l'ion MH^+ dans le secteur d'accélération

Nous supposerons pour simplifier, qu'un ion MH^+ se présente à l'entrée d'un condensateur plan entre les plaques duquel est appliquée une tension U.

a) Quelle est la charge e (valeur, unité) de l'ion MH^+ ?
b) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, exprimer le rapport m/e en fonction de la vitesse v de l'ion à la sortie du condensateur et de U.

2) Trajectoire de l'ion MH^+ dans le secteur d'accélération

Nous supposerons que l'ion MH^+ entre dans le secteur d'accélération avec un vecteur vitesse $\vec{v} = v\,\vec{\imath}$ où règne un champ magnétique $\vec{B}$ constant orthogonal à ce dernier.



a) En adoptant un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ tel que défini sur la figure, exprimer les composantes $\vec{B}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On notera B la norme de $\vec{B}$.
b) En notant (x, y, z) les coordonnées du centre de gravité G de l'ion à un instant t dans le secteur de déviation, l'origine des temps étant prise au moment de l'entrée dans l'ion dans le secteur, établir à l'aide de la seconde loi de Newton, les équations différentielles du mouvement.
c) En déduire que le mouvement s'effectue dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

d) Résoudre les équations différentielles et montrer que le mouvement est circulaire uniforme en précisant les coordonnées du centre Ω de ce cercle et prouver que son rayon est :

$$r = \frac{m\, v}{e\, B}$$

e) En déduire le rapport m/e en fonction de r, B et v

f) En comparant à la précédente formule, déduire une expression de v en fonction de $U,\ r, B$.

g) En déduire le rapport m/e en fonction de U, r, B

Corrigé :

1)

a) $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\, C$

b) Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{1}{2}\, m\, v^2 = e\, U$$

Soit :

$$\frac{m}{e} = \frac{2\, U}{v^2}$$

2)

a) $\vec{B} = B\, \vec{k}$

$$\vec{B}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

b) L'ion est soumis à la force de Lorenz :

$$\vec{F} = e\, \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\begin{pmatrix} e\, v_x \\ e\, v_y \\ e\, v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e\, B\, v_y \\ -e\, B\, v_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

sa quantité d'accélération est :

$$m\, \vec{a} \begin{pmatrix} m\, \dot{v}_x \\ m\, \dot{v}_y \\ m\, \dot{v}_z \end{pmatrix}$$

La loi de Newton donne, en négligeant le poids de l'ion :

$$\begin{cases} m\, \dot{v}_x = e\, B\, v_y \\ m\, \dot{v}_y = -e\, B\, v_x \\ m\, \dot{v}_z = 0 \end{cases}$$

c) La dernière équation donne :

$$v_z = constante = v_z(0) = 0$$

Donc :

$$z = constante = z(0) = 0$$

Le mouvement s'effectue donc dans le plan (O, x, y)

d) De la deuxième équation, on tire :

$$v_x = -\frac{m}{e\,B}\,\dot{v}_y$$

Ce qui, reporté dans la première, conduit à :

$$\ddot{v}_y = -\left(\frac{e\,B}{m}\right)^2 v_y$$

En posant :

$$\omega_0 = \frac{e\,B}{m}$$

On en déduit :

$$v_y = A\,cos(\omega_0 t) + B\,sin(\omega_0 t)$$

Or $v_y(0) = 0$ donc : $A = 0$ et :

$$v_y = B\,sin(\omega_0 t)$$

$$v_x = -\frac{1}{\omega_0}\,\dot{v}_y = -B\,cos(\omega_0 t)$$

Or $v_x(0) = v$ donc – $B = v$ et :

$$v_x = v\,cos(\omega_0 t)$$

$$v_y = -v\,sin(\omega_0 t)$$

D'où :

$$x = \frac{v}{\omega_0}\,sin(\omega_0 t) + c_1$$

$$y = \frac{v}{\omega_0}\,cos(\omega_0 t) + c_2$$

Or on a initialement :

$$x(0) = 0$$

$$y(0) = 0$$

On en déduit :

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = -\frac{v}{\omega_0}$$

D’où les équations horaires du mouvement :

$$x = \frac{v}{\omega_0}\ sin(\omega_0 t)$$

$$y = \frac{v}{\omega_0}\ cos(\omega_0 t) - \frac{v}{\omega_0}$$

En éliminant le temps, on aboutit à :

$$x^2 + \left(y + \frac{v}{\omega_0}\right)^2 = \left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2$$

qui est l’équation d’un cercle de rayon :

$$r = \frac{v}{\omega_0} = \frac{m\,v}{e\,B}$$

et de centre $\Omega(0, -\mathrm{r})$

e)

$$\frac{m}{e} = \frac{r\,B}{v}$$

f) En comparant les deux expressions obtenues pour le rapport $\frac{m}{e}$ on a :

$$\frac{2\,U}{v^2} = \frac{r\,B}{v}$$

Soit :

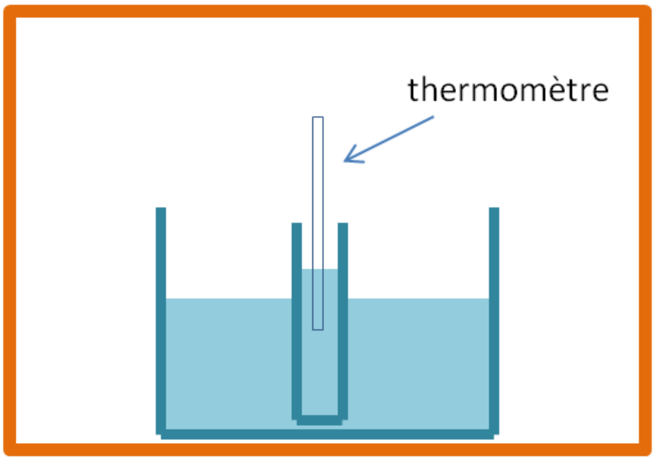
$$v = \frac{2\,U}{r\,B}$$

g) En reportant dans la seconde expression

$$\frac{m}{e} = r\,B\,\frac{r\,B}{2\,U} = \frac{r^2\,B^2}{2\,U}$$

II Exercice 2 : Thermodynamique : mise en contact de deux systèmes de températures différentes (8 points)

Dans une enceinte calorifugée, on introduit un récipient en verre contenant un demi litre d'eau à la température $t_1 = 20°C$. Sortant du réfrigérateur un verre contenant 10 cL d'eau à la température $t_2 = 6°C$, on met un thermomètre dans le verre et on met ce dernier dans le récipient.



1) Qu'observe-t-on sur le thermomètre ? Donner l'allure de la courbe de température en fonction du temps, l'origine des temps étant prise lorsque le verre est dans le récipient.
2) Calculer la capacité thermique c_{P1} du système formé par le récipient et son contenu d'eau puis celle c_{P2} du système formé par le verre et son contenu d'eau.
3) En notant t la température en degrés Celsius maximale obtenue, faire un bilan de la variation d'énergie interne du système formé par les deux systèmes précédents, entre l'instant d'origine et l'instant où la température t est atteinte. En déduire t puis sa valeur T en Kelvin.
4) En déduire la chaleur Q_1 échangée par le système formé du récipient et son contenu d'eau et la chaleur Q_2 échangée par le système formé par le verre et son contenu d'eau
5) En imaginant une transformation réversible faisant passer le système du même état initial au même état final, en déduire la variation d'entropie du récipient, celle du

verre, puis celle du système. Le signe de cette variation est il conforme au second principe ?

Données :

- Capacité thermique massique de l'eau : $c_{eau} = 4{,}2\ kJ\ kg^{-1}$
- Capacité thermique massique du verre : $c_{verre} = 800\ J\ kg^{-1}$
- Masse volumique de l'eau : $\rho_{eau} = 1{,}0\ kg\ L^{-1}$
- Masse du récipient (sans l'eau) : 500 g
- Masse du verre (sans l'eau) : 200 g

Corrigé :

1) La température croît jusqu'à une valeur à laquelle elle se stabilise avant de remonter très lentement vers la température de la pièce dans laquelle se trouve l'enceinte calorifugée.
2) Calcul des capacités thermiques

$$C_{P1} = m_{récipient}\ c_{verre} + m_{eau\ du\ récipient} c_{eau}$$

$$C_{P1} = 0{,}5 \times 800 + 0{,}5 \times 4200 = 2500\ J\ K^{-1}$$

$$C_{P2} = m_{verre}\ c_{verre} + m_{eau\ du\ verre} c_{eau}$$

$$C_{P2} = 0{,}2 \times 800 + 0{,}1 \times 4200 = 580\ J\ K^{-1}$$

3) Ecrivons la conservation de l'énergie interne du système formé par le récipient, le verre, l'eau qu'ils contiennent et l'enceinte calorifugée dont on néglige la capacité thermique :

$$C_{P1}\ (t - t_1) + C_{P2}\ (t - t_2) = 0$$

Soit :

$$t = \frac{C_{P1}\ t_1 + C_{P2}\ t_2}{C_{P1} + C_{P2}}$$

$$t = \frac{2500 \times 20 + 580 \times 6}{2500 + 580} = \frac{53480}{3080} \approx 17{,}36°C$$

Soit en Kelvin :

$$T = t + 273{,}15 = 290{,}51\ K$$

4) Chaleurs échangées

Récipient + contenu : $Q_1 = C_{P1}\ (t - t_1) = 2500 \times (17{,}36 - 20) \approx -6600\ J$

Verre+ contenu : $Q_2 = -Q_1 = 6600\,J$

5) Calculs de variation d'entropie :

On imagine pour cela des transformations réversibles conduisant chaque sous-système du même état initial au même état final.

Récipient + contenu :

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T} C_{P1}\,\frac{dT}{T} = C_{P1}\,Ln\left(\frac{T}{T_1}\right) = 2500\,Ln\left(\frac{290{,}51}{293{,}15}\right) \approx -22{,}62\,J\,K^{-1}$$

Verre+ contenu :

$$\Delta S_2 = \int_{T_1}^{T} C_{P2}\,\frac{dT}{T} = C_{P2}\,Ln\left(\frac{T}{T_2}\right) = 580\,Ln\left(\frac{290{,}51}{279{,}15}\right) \approx 23{,}14\,J\,K^{-1}$$

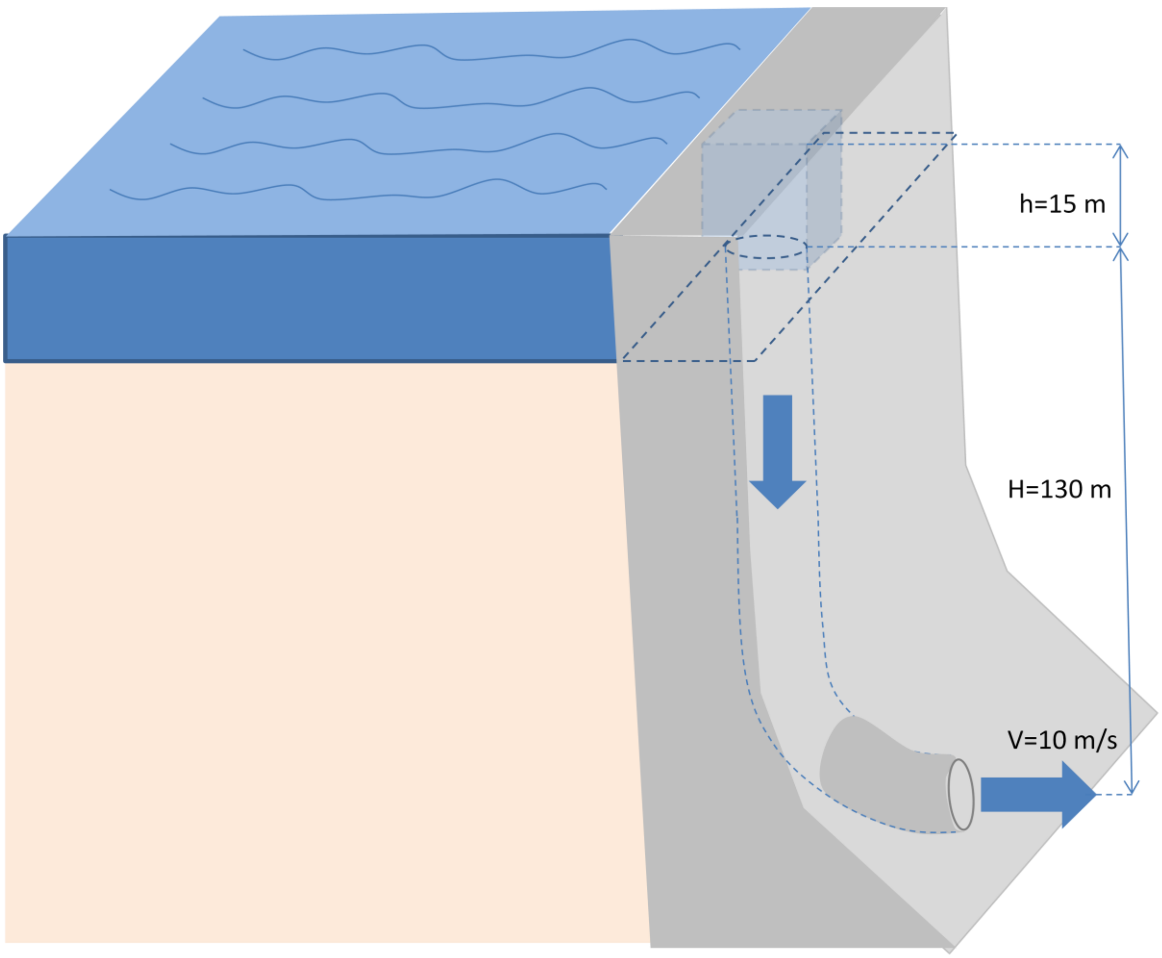
Variation totale d'entropie :

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0{,}52\,J\,K^{-1}$$

Il est à noter que cette variation est strictement positive ce qui est conforme au second principe.

III Problème : bilan d'énergie : étude de la puissance d'un barrage électrique (12 points)

Le but de ce problème est l'étude la puissance mécanique fournie par un barrage à une turbine en vue de produire de l'électricité et d'alimenter des villages voisins.

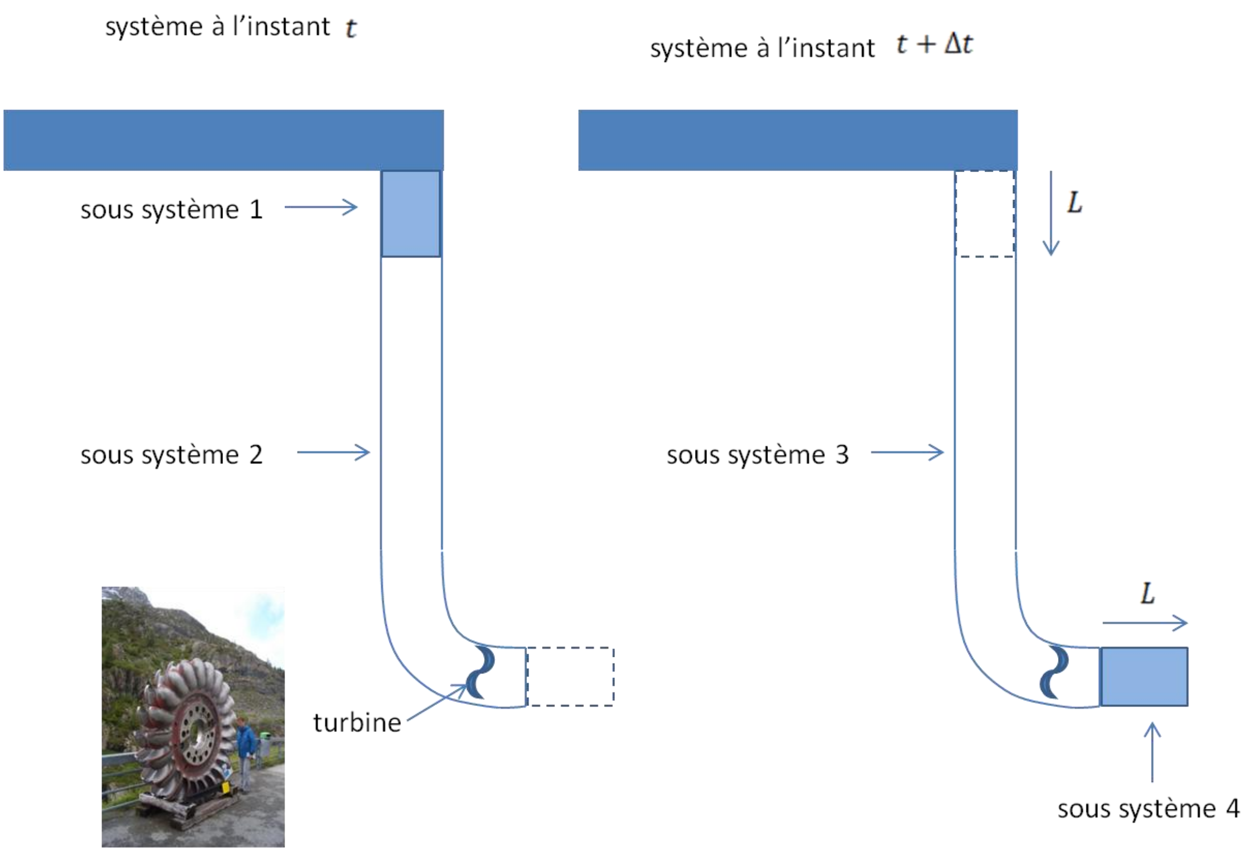


Les données sont :

- Vitesse de l'eau dans la conduite et à sa sortie : $v = 10 \ m\,s^{-1}$
- Hauteur de chute de l'eau : $H = 130\,m$
- Hauteur d'eau dans le barrage : $h = 15\,m$
- Section de la conduite d'eau : $S = 0{,}35\,m^2$
- Masse volumique de l'eau : $\rho_{eau} = 1000\,kg\,m^{-3}$
- Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}81\,m\,s^{-2}$
- Capacité thermique massique de l'eau aux températures usuelles : $c_{eau} = 4180\,J\,kg^{-3}$
- Température de l'eau en amont (dans le réservoir) $T_0 = 290\,K$
- Température de l'eau en aval (en bas du barrage): $T_1 = 292\,K$

L'eau étant incompressible, elle s'écoule à vitesse constante dans la conduite en régime permanent.

On considère alors le système formé par l'eau située à un instant t entre l'entrée de la conduite et sa sortie. Pendant une durée Δt, l'eau se déplace d'une quantité L. On supposera la durée suffisamment faible pour qu'à sa sortie du tube, l'eau forme un tube de même section.



Le système est décomposé en sous systèmes tels qu'indiqués sur la figure. Formé des sous systèmes 1 et 2 à l'instant t, le système devient formé des sous systèmes 3 et 4 à l'instant $t + \Delta t$.

En régime permanent, les caractéristiques de ces sous-systèmes ne dépendent pas du temps.

On note $z_G(t)$ la position du centre de gravité du système à l'instant t et $z_G(t + \Delta t)$ sa position à l'instant $t + \Delta t$.

On note M la masse totale du système.

Questions

1) Exprimer L en fonction de v et de Δt.
2) Exprimer en fonction de S, v , Δt, le volume du sous système 1
3) Exprimer en fonction de ρ_{eau}, S , v , Δt, l'énergie cinétique du sous système 1
4) Exprimer en fonction de M, g , $z_G(t)$, l'énergie potentielle du système à l'instant t
5) Reprendre la question 3) avec le sous système 4

On s'intéresse maintenant à la transformation du système entre les instants t et $t + \Delta t$. On note Q la chaleur échangée par ce système avec l'extérieur, W le travail des forces extérieures de pression, $W_{turbine}$ le travail échangé par le système avec la turbine.

6) Exprimer le travail de la pression P_1 en amont en fonction de P_1 , S , v , Δt (on suppose la durée Δt suffisamment faible pour que P_1 puisse être considérée constante.
7) Exprimer de façon analogue, le travail de la pression P_0 en aval
8) En déduire W en fonction de P_0 , P_1 , S , v , Δt puis en fonction de ρ_{eau}, g , h S , v , Δt
9) En notant E_2 l'énergie totale (mécanique macroscopique + interne) du système 2 , E_3 celle du système 3, que peut on dire de ces deux valeurs compte tenu du régime permanent.
10) Exprimer l'énergie totale $E(t)$du système à l'instant t en fonction de l'énergie interne $U(t)$ du système 1, de son énergie cinétique et potentielle de pesanteur et de E_2
11) Exprimer l'énergie totale $E(t + \Delta t)$ du système à l'instant $t + \Delta t$ en fonction de l'énergie interne $U(t + \Delta t)$ du système 4, de son énergie cinétique et potentielle de pesanteur et de E_3.
12) En écrivant que la variation d'énergie totale est égale à la chaleur et au travail échangé avec l'extérieur autre que le travail des forces de pesanteur, établir la relation :

$$U(t + \Delta t) - U(t) + M\, g\, \left(z_G(t + \Delta t) - z_G(t)\right) = W + W_{turbine} + Q$$

13) En supposant la température du sous système 4 égale à T_1 et en notant qu'il est une transformation du sous système 1 de température T_0 , exprimer la variation d'énergie interne $U(t + \Delta t) - U(t)$ en fonction de ρ_{eau} , c_{eau}, S , v, Δt , T_0 , T_1
14) En utilisant l'associativité du barycentre, exprimer $M\left(z_G(t + \Delta t) - z_G(t)\right)$ en fonction de ρ_{eau} , S , v, $H, \Delta t$. (L étant très petite, on confondra le centre de gravité du système 1 avec le centre de sa section amont)
15) En déduire que la puissance fournie à la turbine est :

$$\mathcal{P}^{fournie} = \frac{-W_{turbine}}{\Delta t} = \rho_{eau}\, S\, v\, g\, (H + h) - \left(\rho_{eau}\, S\, v\, c_{eau}(T_1 - T_0) + \frac{|Q|}{\Delta t}\right)$$

La puissance fournie se compose de deux termes. Le premier est égal à la perte d'énergie potentielle du système formé par l'eau du barrage considérée entre une section en amont et une section en aval. C'est donc la puissance $\mathcal{P}^{pesanteur}$ des forces de pesanteur sur ce système

Le second terme traduit la puissance perdue sous forme d'énergie microscopique due aux chocs de l'eau et aux frottements dans la conduite (puissance dissipée). On peut donc écrire :

$$\mathcal{P}^{fournie} = \mathcal{P}^{pesanteur} - \mathcal{P}^{dissipée}$$

Une mesure de la puissance fournie à la turbine donne une valeur de 4,6 MW.

16) Calculer $\mathcal{P}^{pesanteur}$ et en déduire $\mathcal{P}^{dissipée}$
17) En déduire le rendement de ce barrage sous forme :

$$r = \frac{\mathcal{P}^{fournie}}{\mathcal{P}^{pesanteur}}$$

On suppose que 4 conduites identiques sont installées sur ce barrage afin d'en multiplier la puissance par 4. On fait l'hypothèse qu'un foyer d'un village avoisinant consomme en moyenne sur une année 20 KWh par jour.

18) Quelle énergie en KWh peut fournir le barrage en un jour (on négligera les pertes électriques (pertes magnétiques et effet Joule dû au transport de l'électricité) ?
19) En supposant (à tort, mais pour simplifier !) les besoins journaliers de chaque foyer constants sur l'année, combien de foyers ce barrage peut il alimenter en électricité ?

Afin de caractériser de façon plus parlante la puissance dissipée, on définit une hauteur de charge h' comme étant la hauteur d'eau dont il faudrait amputer le réservoir du barrage pour obtenir la même puissance fournie sans tenir compte de puissance dissipée. On a ainsi :

$$\mathcal{P}^{dissipée} = \rho_{eau}\, S\, v\, g\, h'$$

20) Calculer h'

A titre d'information, le plus grand barrage au monde est celui des trois gorges en Chine sur le Yangzi Jiang dont les caractéristiques sont :

Altitude du réservoir : 175 m

Nombre de turbines : 32

Puissance totale : 22 500 MW (soit : 703 MW par turbine à comparer à nos 4,6 MW de l'exercice)

Le plus grand barrage français du point de vue puissance électrique est celui de Grand'maison (Isère)

Altitude du réservoir (par rapport au lit de rivière) : 140 m

Puissance totale : 1 800 MW (comparer avec le chinois, on se sent petit !!!)

Nombre de turbines : 12

Corrigé :

1) $L = v\ \Delta t$
2) $V_1 = S\ v\ \Delta t$
3)

$$Ec_1 = \frac{1}{2}\ \rho_{eau} S\ v\ \Delta t\ v^2 = \frac{1}{2}\ \rho_{eau} S\ v^3\ \Delta t$$

4) $E_P(t) = Mg\ z_G(t)$
5)

$$Ec_4 = \frac{1}{2}\ \rho_{eau} S\ v^3\ \Delta t$$

6)

$$W_{amont} = P_1 \, S \, L = P_1 \, S \, v \, \Delta t$$

7)

$$W_{aval} = -P_0 \, S \, L = -P_0 \, S \, v \, \Delta t$$

8)

$$W = (P_1 - P_0) \, S \, v \, \Delta t = \rho_{eau} \, g \, h \, S \, v \, \Delta t$$

9)

$$E_2 = E_3$$

10)

$$E(t) = U(t) + \frac{1}{2} \, \rho_{eau} S \, v^3 \, \Delta t + Mg \, z_G(t) + E_2$$

11)

$$E(t + \Delta t) = U(t + \Delta t) + \frac{1}{2} \, \rho_{eau} S \, v^3 \, \Delta t + Mg \, z_G(t + \Delta t) + E_3$$

12) Appliquons le principe de la variation de l'énergie totale dérivé du premier principe

$$E(t + \Delta t) - E(t) = W + W_{turbine} + Q$$

Soit :

$$U(t + \Delta t) - U(t) + \; Mg \, z_G(t + \Delta t) - \; Mg \, z_G(t) = W + W_{turbine} + Q$$

13) L'eau étant incompressible, son énergie interne ne dépend que de sa température et :

$$U(t + \Delta t) - U(t) = \rho_{eau} \, S \, v \, \Delta t \, c_{eau} \, (T_1 - T_0)$$

14) Par associativité du barycentre, en notant :

m_1 = masse du système 1, z_{G1} la coordonnée verticale de son centre de gravité

m = masse du système 2 ou 3, z_{G2} la coordonnée verticale de son centre de gravité

m_4 = masse du système 4, z_{G4} la coordonnée verticale de son centre de gravité

On a :

$$m_1 \, z_{G1} + \; m \, z_{G2} = (m_1 + m) \, z_G(t) = M \, z_G(t)$$

$$m \, z_{G2} + \; m_4 \, z_{G4} = (m + m_4) \, z_G(t + \Delta t) = M \, z_G(t + \Delta t)$$

Soit par soustraction :

$$M \, z_G(t + \Delta t) - M \, z_G(t) = m_4 \, z_{G4} - m_1 \, z_{G1} = \rho_{eau} \, S \, v \, \Delta t \, (z_{G4} - z_{G1})$$

$$M\, z_G(t+\Delta t) - M\, z_G(t) = -\rho_{eau}\, S\, v\, H\, \Delta t$$

15)

$$\mathcal{P}^{fournie} = \frac{-W_{turbine}}{\Delta t}$$

$$\mathcal{P}^{fournie} = \frac{\rho_{eau}\, S\, v\, g\, H\, \Delta t + \rho_{eau}\, S\, v\, g\, h\, \Delta t - \rho_{eau}\, S\, v\, c_{eau}\, \Delta t\, (T_1 - T_0) + Q}{\Delta t}$$

$$\mathcal{P}^{fournie} = \rho_{eau}\, S\, v\, g\, (H+h) - \left(\rho_{eau}\, S\, v\, c_{eau}\;\, (T_1 - T_0) + \frac{|Q|}{\Delta t}\right)$$

16)

$$\mathcal{P}^{pesanteur} = \rho_{eau}\, S\, v\, g\, (H+h)$$

$$\mathcal{P}^{pesanteur} = 1000 \times 0{,}35 \times 10 \times 9{,}81 \times 145 \approx 5{,}0\, MW$$

17) rendement

$$r = \frac{\mathcal{P}^{fournie}}{\mathcal{P}^{pesanteur}} = \frac{4{,}6}{5{,}0} = 0{,}92$$

18) Energie fournie aux quatre turbines en un jour

$$W^{fournie} = 4{,}6 \times 10^6 \times 24 \times 4 = 4{,}4 \times 10^8\; W\, h = 4{,}4 \times 10^5\; KWh$$

19) Nombre de foyers alimentés :

$$N = \frac{4{,}4 \times 10^5}{20} = 22\,000$$

20) Hauteur de charge

$$h = \frac{\mathcal{P}^{dissipée}}{\rho_{eau}\, S\, v\, g} = \frac{(5{,}0 - 4{,}6) \times 10^6}{1000 \times 0{,}35 \times 10 \times 9{,}81} \approx 11{,}6\, m$$