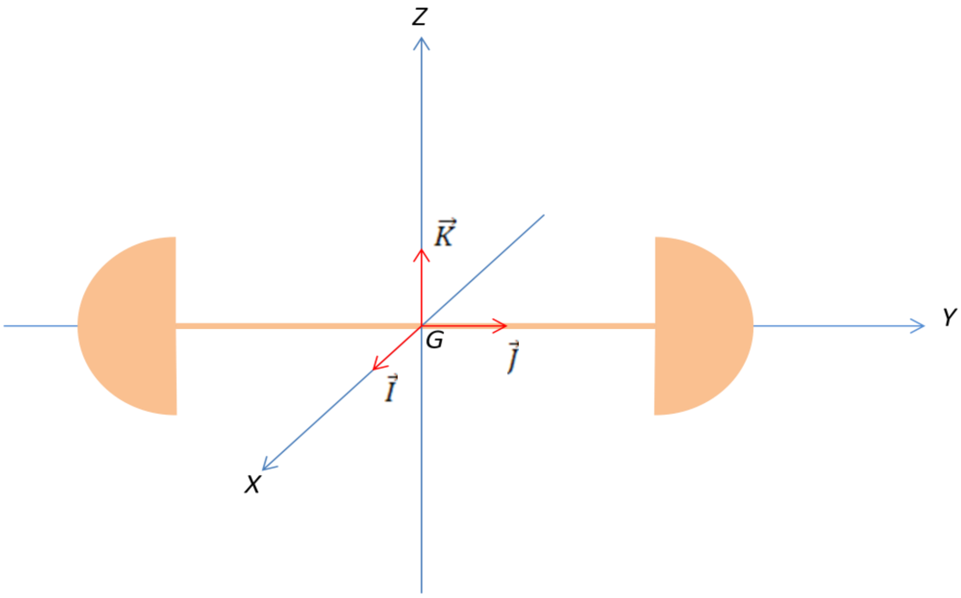
Contrôle de Mécanique du solide AI3 -11 Avril 2015

(Enseignant : Laurent Gry)

I Problème 1 : Etude dynamique d'un système

L'objectif du problème est d'étudier la dynamique d'un système qui s'apparente à la fameuse quintaine médiévale.

Considérons donc un système formé de deux demi-disques de masse *m* et de rayon *R*, reliés à un mât par une tige de masse que l'on supposera négligeable devant celle des demi-disques, le système pouvant tourner librement autour du mât. Modélisons le système de la façon suivante :



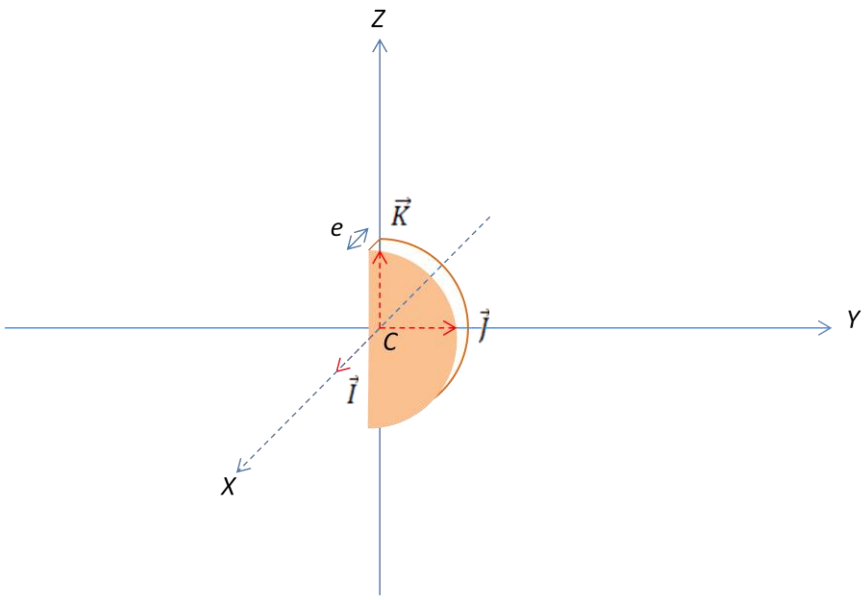
La matrice d'inertie de ce système dans le repère principal d'inertie$(G\,;X\,;Y\,;Z)$, sera notée :

$$\begin{pmatrix} J_X & 0 & 0 \\ 0 & J_Y & 0 \\ 0 & 0 & J_Z \end{pmatrix}$$

Afin de l'évaluer, nous allons commencer par quelques préliminaires.

Partie 1 : Centre de gravité d'un demi-disque (4 points)

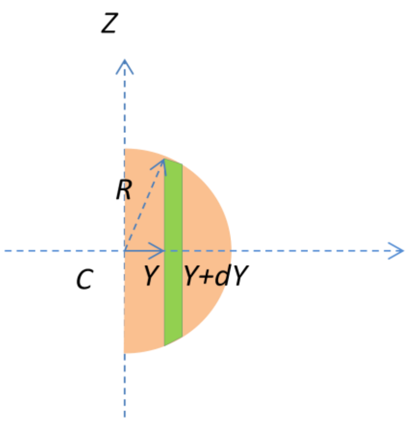
On considère un demi-disque <u>homogène</u> de masse m, de rayon *R* et d'épaisseur *e* et un repère *(C ; X ; Y ; Z)* dans le plan de symétrie du disque parallèle aux deux faces.



Pour des raisons de symétrie, le centre de gravité se situe alors sur l'axe *(C ; Y)*. Rappelons que si nous désignons ses coordonnées dans le repère *(C ; X ; Y ; Z)* nous avons, *V* désignant le volume du disque :

$$m\, Y_G = \iiint_V Y\, dm$$

L'objectif est alors d'évaluer l'intégrale triple. Nous proposons alors pour cela d'utiliser un élément de volume défini par la partie de disque située entre les plans d'ordonnée Y et d'ordonnée $Y + dY$.



1) **Déterminer l'élément de volume d^1V en fonction de R, Y et e (1 point)**
2) **En déduire l'élément de masse d^1m associé ainsi que la contribution élémentaire à l'intégrale $Y\, d^1m$ en fonction de la masse volumique ρ, de R, Y et e (1 point)**

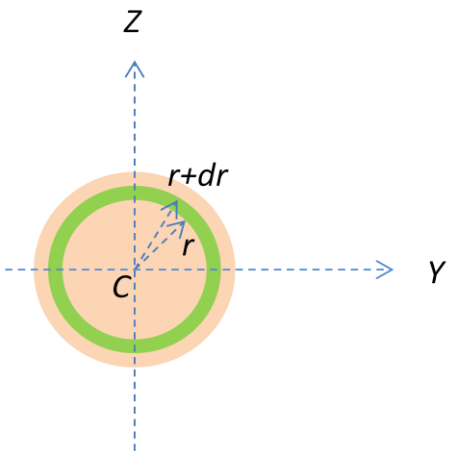
3) En déduire $\iiint_V Y\, dm$ en fonction des mêmes paramètres (1 point)
4) En déduire Y_G en fonction de R (1 point)

Partie 2 : Tenseur d'inertie d'un demi-disque (10 points)

Nous reprenons le demi-disque de l'exercice précédent avec le même repère mais nous cherchons cette fois-ci à évaluer le tenseur d'inertie, en considérant l'épaisseur e infiniment petite. Pour cela nous commençons par évaluer ce tenseur dans le même repère, mais pour un disque plein de masse 2 m (Attention à prendre en compte que la masse est double !!!).

1) **Expliquer pourquoi la matrice associée à ce tenseur est diagonale (1 point)**

Pour calculer le moment d'inertie J_{CXX} du disque par rapport à l'axe $(C; X)$ perpendiculaire au plan de la figure, nous proposons d'utiliser un élément de volume en forme d'anneau constitué par la portion de disque située entre les rayons r et $r + dr$.



2) **Déterminer l'élément de volume d^1V en fonction de r et e (1 point)**
3) **En déduire l'élément de masse d^1m associé ainsi que la contribution élémentaire à l'intégrale $r^2\, d^1m$ en fonction de la masse volumique ρ, de r et e (1 point)**
4) **En déduire le moment d'inertie J_{CXX} en fonction de m et R(1 point)**

Pour calculer les moments d'inertie J_{CYY} et J_{CZZ} du disque, nous noterons que, compte tenu de la faible épaisseur de ce dernier, nous pouvons faire les approximations :

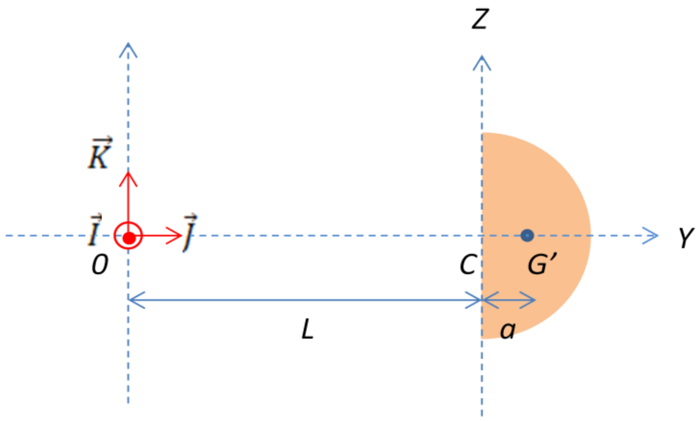
$$J_{CYY} \approx \iiint_V Z^2 dm \qquad J_{CZZ} \approx \iiint_V Y^2 dm$$

5) **Calculer $J_{CYY} + J_{CZZ}$ en choisissant un élément de volume adapté et en détaillant les étapes comme précédemment (1 point)**
6) **En déduire J_{CYY} et J_{CZZ} (1 point)**

7) En déduire le tenseur d'inertie du disque dans le repère *(C ; X ; Y ; Z)* et montrer que le tenseur d'inertie du demi-disque dans ce même repère est (1 point) :

$$\begin{pmatrix} \frac{m\,R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\,R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\,R^2}{4} \end{pmatrix}$$

On décale alors le disque sur l'axe des *Y* à une distance *L*. On note *G'* la position du centre de gravité du demi-disque, *a* la distance *CG'*.



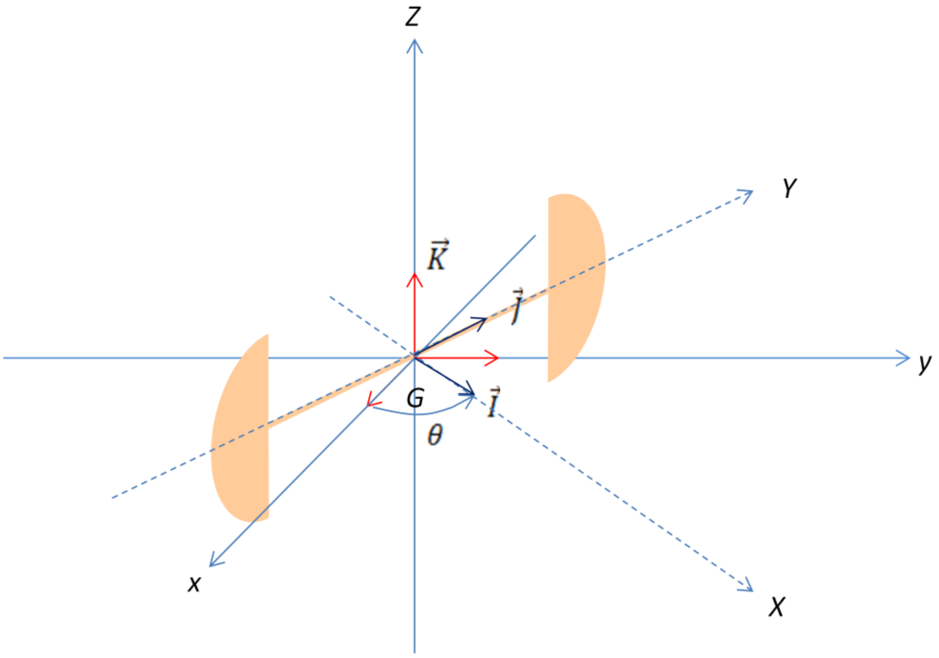
8) En utilisant le théorème d'Huygens, exprimer le moment d'inertie $J_{O\vec{I}}$ du demi-disque par rapport à l'axe $(O;\ \vec{I})$ en fonction de son moment d'inertie $J_{C\vec{I}}$ par rapport à l'axe $(C;\ \vec{I})$, de *m*, *L* et *a* (Conseil, passer par le moment d'inertie $J_{G'\vec{I}}$ du demi-disque par rapport à l'axe $(G';\ \vec{I})$ (1 point)

9) Exprimer de même $J_{O\vec{K}}$ en fonction de $J_{C\vec{K}}$, *m*, *L* et *a* puis $J_{O\vec{J}}$ en fonction de $J_{C\vec{J}}$ (1 point)

11) En déduire la matrice d'inertie du demi-disque dans le repère $(O\,;\ \vec{I}\,;\ \vec{J}\,;\ \vec{K})$ puis celle du système mécanique initial constitué par les deux demi-disques (quintaine) (1 point)

Partie 3 : Etude dynamique du système (8 points)

On décrit la position du système par l'angle θ dont a tourné le système autour de l'axe de rotation orienté par $\vec{K}$.



1) **Exprimer le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ de l'espace solide formé par le système dans la base $(\vec{I}\,;\vec{J}\,;\vec{K})$ du repère principal d'inertie en fonction de θ (1 point)**
2) **Exprimer le vecteur moment cinétique propre $\vec{\sigma}(G)$ du système dans la base $(\vec{I}\,;\vec{J}\,;\vec{K})$ (1 point)**

Un chevalier donne à l'instant t = 0 une impulsion de vitesse v_0 au point A de coordonnées $\left(0\,;L+\frac{R}{2}\,;0\right)$ du demi-disque situé dans le plan Y > 0, le système étant dans la position intiale : $\theta = 0$. On suppose une force de frottement visqueux de l'air de la forme :

$$d\vec{f} = -c\,dS\,\vec{v}(M)$$

c étant une constante, dS un élément de surface en un point M d'un des demi-disques de vecteur vitesse $\vec{v}(M)$.

3) **Exprimer ce vecteur vitesse $\vec{v}(M)$ dans la base $(\vec{I}\,;\vec{J}\,;\vec{K})$ du solide en fonction des coordonnées $(0\,;Y\,;Z)$ du point M dans le repère $(G\,;\vec{I}\,;\vec{J}\,;\vec{K})$, de θ et de L (1 point)**
4) **Exprimer le moment $d\vec{M}$ en G de la force de frottement de l'air $d\vec{f}$ exercée sur l'élément de surface dS en ce point M (1 point)**

5) **En déduire le moment $\vec{M}_{1G}$ en G des forces de frottement de l'air exercées sur le demi-disque D_1 du demi-plan Y >0, puis le moment $\vec{M}_G$ en G des forces de frottement de l'air exercées sur les deux demi-disques en fonction de θ et de $I_1 = \iint_{D_1} Y^2\, dS$ qu'on ne cherchera pas à calculer (1 point)**
6) **En appliquant le théorème du moment cinétique en G, déduire une équation différentielle vérifiée par θ de la forme (1 point):**

$$\ddot{\theta} = -\alpha\, \dot{\theta}$$

où α est une constante positive que l'on exprimera en fonction de I_1 et du moment d'inertie J_Z du système par rapport à l'axe $(G\,;\vec{K})$.

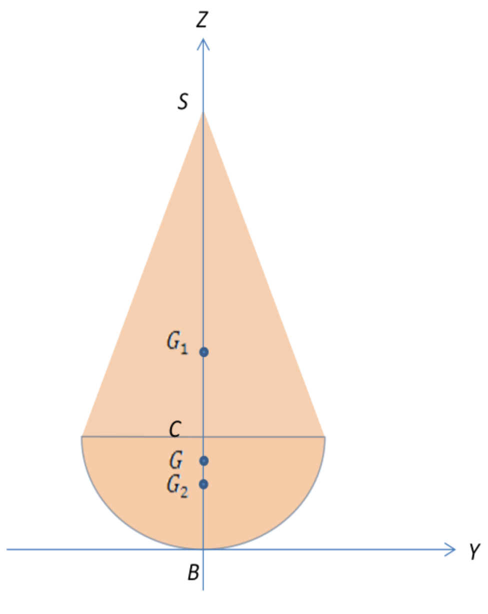
7) **En posant $\dot{\theta} = \omega$, résoudre cette équation en ω en faisant le lien entre $\omega(0)$ et v_0 (1 point)**
8) **Tracer l'allure de la courbe $\omega(t)$ de la vitesse angulaire en fonction du temps (1 point).**

II Problème 2 : Le culbuto (12 points)

L'objectif de cet exercice est d'étudier la dynamique d'un culbuto, c'est-à-dire une demi-boule de rayon *R* surmontée d'un cône de même rayon et de hauteur *H*, les deux éléments du culbuto étant faits dans un même matériau de masse volumique ρ.

On rappelle les positions des centres de gravité G_1 pour le cône et G_2 pour la demi-boule, C désignant le centre de la demi-boule, commun avec le centre de la base du cône.

$$CG_1 = \frac{1}{4}H \qquad CG_2 = \frac{3}{8}R$$

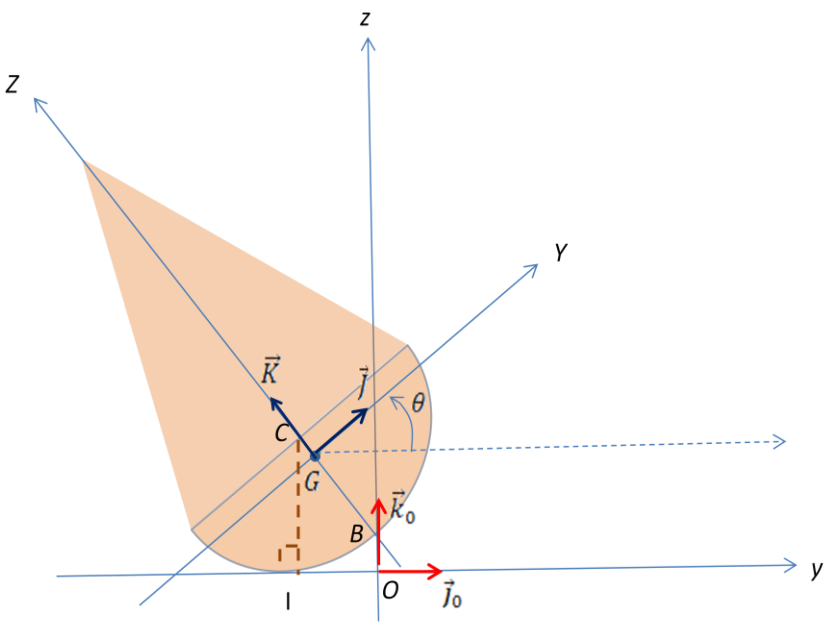


1) **Par associativité du barycentre, déterminer les coordonnées du centre de gravité *G* du culbuto dans le repère orthonormé direct *(B ; X ; Y ; Z)* B étant le point du culbuto en contact avec le sol à l'équilibre (2 point).**

2) **Vérifier que pour $H = 0$, on retrouve bien la position du centre de gravité de la demi boule et pour R tendant vers 0, celle du cône (1 point).**

3) **Déterminer une relation entre H et R pour que le culbuto reste stable une fois posé (1 point).**

On s'intéresse maintenant aux oscillations libres du culbuto par rapport à un repère fixe $(O; \vec{\imath}_0; \vec{\jmath}_0; \vec{k}_0)$. On paramètre sa position par l'angle $\theta = (\vec{\jmath}_0 ; \vec{J})$.



4) Exprimer le vecteur rotation du culbuto dans la base $(\vec{I}; \vec{J}; \vec{K})$ de ce dernier en fonction de $\boldsymbol{\theta}$ (1 point)

5) En déduire le vecteur moment cinétique propre $\vec{\sigma}(G)$ du culbuto dans la base $(\vec{I} ; \vec{J} ; \vec{K})$ **en notant J_X son moment d'inertie par rapport à l'axe $(G; \vec{I})$ (1 point)**

6) **En considérant que la vitesse du point I du culbuto en contact avec le sol est nulle à tout instant, exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}_G$ du centre de gravité puis le vecteur accélération $\vec{a}_G$ dans la base $(\vec{\imath}_0; \vec{\jmath}_0; \vec{k}_0)$ en fonction de $a = CG$, *R*, θ (On exprimera pour cela d'abord $(\vec{J}; \vec{K})$ dans $(\vec{\jmath}_0; \vec{k}_0)$ (2 points)**

7) **En appliquant le théorème sur la résultante des forces, exprimer la réaction de sol $\vec{R}_I$ au point *I* en fonction de la masse totale *m* du culbuto, de *g*, *a*, *R*, θ (1 point)**

8) **Exprimer le moment $\vec{M}_G(\vec{R}_I)$ de la réaction de sol en *I* en se plaçant dans le cas d'oscillations de faible amplitude pour lesquelles on peut faire les approximations $\cos(\theta) \approx 1$ et $\sin(\theta) \approx \theta$ (1 point) :**

9) **En déduire l'équation différentielle vérifiée par θ en négligeant le terme en $\dot{\theta}^2$ et donner la pulsation propre et la période des oscillations (2 point)**

CORRECTION

Problème 1 :

Partie 1

1)

$$\boxed{d^1V = 2\sqrt{R^2 - Y^2}\ e\ dY}$$

2)

$$\boxed{d^1m = \rho\ d^1V = 2\ \rho\ e\sqrt{R^2 - Y^2}\ dY}$$

3)

$$\iiint_V Y\ \ dm = \int_{Y=0}^{Y=R} C\ e\ \times 2\ Y\ (R^2 - Y^2)^{\frac{1}{2}}\ dY = \rho\ e\ \left[\frac{2}{3}\ (R^2 - Y^2)^{\frac{1}{2}}\right]_{Y=0}^{Y=R}$$

$$\boxed{\iiint_V Y\ \ d^1m = \frac{2}{3}\ \rho\ e\ R^3}$$

4)

$$m = \rho\ V = \rho\ \frac{\pi\ R^2}{2}\ e$$

$$\rho\ \frac{\pi\ R^2}{2}\ e\ Y_G = \frac{2}{3}\ \rho\ e\ R^3$$

$$\boxed{Y_G = \frac{4\ R}{3\ \pi}}$$

Partie 2

1)

Il y a deux plans coordonnées de symétrie : les plans X C Y et Y C Z

2)

$$\boxed{d^1V = 2\ \pi\ r\ dr\ e}$$

3)

$$d^1m = \rho \; d^1V = 2\,\pi\,\rho\,e\,r\,dr$$

$$r^2\,d^1m = 2\,\pi\,\rho\,e\,r^3\,dr$$

4)

$$J_{CXX} = \int_{r=0}^{r=R} r^2\,d^1m = 2\,\pi\,\rho\,e\,\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=R} = \frac{\pi\,\rho\,e\,R^4}{2} = \frac{\pi\;\,e\,R^4}{2} \times \frac{2\,m}{\pi\;\,R^2\,e}$$

$$J_{CXX} = m\,R^2$$

5)

$$J_{CYY} + J_{CZZ} = \iiint_V (Y^2 + Z^2)\;\,dm$$

Eléments différentiels considérés :

$$d^1V = 2\,\pi\,r\,dr\,e$$

$$d^1m = 2\,\pi\,\rho\,e\,r\,dr$$

$$r^2\,d^1m = 2\,\pi\,\rho\,e\,r^3\,dr$$

$$J_{CYY} + J_{CZZ} = \int_{r=0}^{r=R} 2\,\pi\,\rho\,e\,r^3\,dr = \;2\,\pi\,\rho\,e\,\frac{R^4}{4} = 2\,\pi\,\times\,\frac{2\,m}{\pi\;\,R^2\,e}\,\times\;e\;\frac{R^4}{4}$$

$$J_{CYY} + J_{CZZ} = m\,R^2$$

6)

$$J_{CYY} = J_{CZZ} = \frac{m\,R^2}{2}$$

7)

Tenseur d'inertie du disque complet dans le repère $(C; X; Y; Z)$:

$$\begin{pmatrix} m\,R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{m\,R^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m\,R^2}{2} \end{pmatrix}$$

Tenseur d'inertie du demi-disque dans le repère $(C; X; Y; Z)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{m\,R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\,R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\,R^2}{4} \end{pmatrix}$$

8)

On applique deux fois le théorème d'Huygens

$$J_{O\vec{I}} = J_{G'\vec{I}} + m\,(L+a)^2$$

$$J_{C\vec{I}} = J_{G'\vec{I}} + m\,a^2$$

Pour déduire par soustraction :

$$J_{O\vec{I}} = J_{C\vec{I}} + m\,(L+a)^2 - m\,a^2$$

$$\boxed{J_{O\vec{I}} = J_{C\vec{I}} + m\,(2\,a\,L + L^2)}$$

9)

De la même façon :

$$\boxed{J_{O\vec{K}} = J_{C\vec{K}} + m\,(2\,a\,L + L^2)}$$

10)

$$\boxed{J_{O\vec{J}} = J_{C\vec{J}}}$$

11)

Tenseur d'interie du demi-système dans le repère $\left(O\,;\ \vec{I}\,;\ \vec{J}\,;\ \vec{K}\right)$:

$$\begin{pmatrix} m\left(\frac{R^2}{2} + 2\,a\,L + L^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\,R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m\left(\frac{R^2}{2} + 2\,a\,L + L^2\right) \end{pmatrix}$$

Tenseur d'interie du système complet dans le repère $\left(O\,;\ \vec{I}\,;\ \vec{J}\,;\ \vec{K}\right)$:

$$\begin{pmatrix} m\,(R^2+4\,a\,L+2\,L^2) & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{m\,R^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & m\,\,(R^2+4\,a\,L+2\,L^2) \end{pmatrix}$$

Partie 3

1)

$$\boxed{\vec{\Omega} = \dot{\theta}\,\vec{K}}$$

2)

Les composantes de $\vec{\sigma}(G)$ dans la base $\left(\vec{I}\,;\,\vec{J}\,;\,\vec{K}\right)$ sont données par l'application du tenseur d'inertie dans le repère $\left(G\,;\,\vec{I}\,;\,\vec{J}\,;\,\vec{K}\right)$ aux composantes du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ soit :

$$\begin{pmatrix} m\,(R^2+4\,a\,L+2\,L^2) & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{m\,R^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & m\,\,(R^2+4\,a\,L+2\,L^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\,\,(R^2+4\,a\,L+2\,L^2)\,\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\boxed{\vec{\sigma}(G) = m\,\,(R^2+4\,a\,L+2\,L^2)\,\dot{\theta}\,\vec{K} = J_z\,\,\dot{\theta}\,\vec{K}}$$

3)

$$\vec{v}(M) = \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{GM} = \dot{\theta}\,\vec{K}\wedge\left(Y\,\vec{J}+Z\,\vec{K}\right)$$

$$\boxed{\vec{v}(M) = -Y\,\dot{\theta}\,\vec{I}}$$

4)

$$d\vec{M}_G = \overrightarrow{GM}\wedge\left(-C\,dS\,\vec{v}(M)\right) = \left(Y\,\vec{J}+Z\,\vec{K}\right)\wedge C\,dS\,Y\,\dot{\theta}\,\vec{I}$$

$$\boxed{d\vec{M}_G = -Y^2\dot{\theta}\,dS\,\vec{K} + C\,Z\,Y\,\dot{\theta}\,dS\,\vec{J}}$$

5)

$$\vec{M}_{1G} = -\dot{\theta}\,\left(\iint_{D_1} Y^2\,dS\right)\vec{K} + C\,\dot{\theta}\,\left(\iint_{D_1} Z\,Y\,dS\right)\vec{J}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{M}_{1G} = -\dot{\theta}\,I_1\,\vec{K} \\ \vec{M}_G = 2\,\vec{M}_{1G} = \,-2\,\dot{\theta}\,I_1\,\vec{K}\end{gathered}}$$

6)

$$\frac{d\,\vec{\sigma}(G)}{dt} = \vec{M}_G$$

$$J_z\ \ddot{\theta} = -2\ I_1\ \dot{\theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = = -\alpha\,\dot{\theta}\quad ;\ \alpha = \ \frac{2\ I_1}{J_z}}$$

7)

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\omega} = -\alpha\,\omega$$

$$\boxed{\begin{gathered}\omega = \omega_0\,e^{-\alpha\,t} \\ \omega_0 = \frac{v_0}{L + \frac{R}{2}}\end{gathered}}$$

8)

Problème 2 : Le culbuto

1)

Le centre de gravité G du culbuto se trouve sur l'axe de symétrie (G ; Z), tout comme les centres de gravité G_1 du cône et G_2 de la demi-boule. Les coordonnées sur cet axe des trois centres de gravité sont liées par le théorème d'associativité :

$$m_1\, Z_{G_1} + m_2\, Z_{G_2} = (m_1 + m_2)\, Z_G$$

soit :

$$\rho\, V_1\, Z_{G_1} + \rho\, V_2\, Z_{G_2} = \rho\,(V_1 + V_2)\, Z_G$$

$$Z_G = \frac{V_1\, Z_{G_1} + V_2\, Z_{G_2}}{V_1 + V_2}$$

$$Z_G = \frac{\frac{1}{3}\,\pi\, R^2\, H\,\left(R + \frac{H}{4}\right) + \frac{2}{3}\,\pi\, R^3 \times \frac{5}{8}\, R}{\frac{1}{3}\,\pi\, R^2\, H + \frac{2}{3}\,\pi\, R^3}$$

$$\boxed{Z_G = \frac{4\, R\, H + H^2 + 5\, R^2}{4\,(H + 2\, R)}}$$

2)

Si on fait $H = 0$, on obtient bien le centre de gravité de la demi-boule :

$$\boxed{Z_G = \frac{5}{8}\, R}$$

Si on fait tendre R vers 0, en gardant H fixé, Z_G tend vers la valeur du centre de gravité d'un cône de hauteur H.

$$\boxed{Z_G = \frac{H}{4}}$$

3)

Le culbuto reste stable si $Z_G < R$, soit :

$$4\, R\, H + H^2 + 5\, R^2 < 4\, R\,(H + 2\, R)$$

$$H^2 + 5\, R^2 < 8\, R^2$$

$$H^2 < 3\, R^2$$

$$\boxed{H < R\,\sqrt{3}}$$

4)

$$\boxed{\vec{\Omega} = \dot{\theta}\,\vec{I}}$$

5)

$$\boxed{\vec{\sigma}(G) = J_X\ \dot{\theta}\,\vec{I}}$$

6)

$$\vec{v}(G) = \vec{v}(I) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{IG}$$

$$\vec{v}(G) = \dot{\theta}\,\vec{I} \wedge \left(R\,\vec{k}_0 - a\,\vec{K}\right)$$

$$\boxed{\vec{v}(G) = -R\,\dot{\theta}\,\vec{j}_0 + a\,\dot{\theta}\,\vec{J}}$$

$$\vec{a}(G) = -R\,\ddot{\theta}\,\vec{j}_0 + a\,\ddot{\theta}\,\vec{J} + a\,\dot{\theta}^2\,\vec{K}$$

Avec :

$$\begin{cases} \vec{J} = \cos(\theta)\ \vec{j}_0 + sin(\theta)\,\vec{k}_0 \\ \vec{K} = -sin(\theta)\,\vec{j}_0 + \cos(\theta)\ \vec{k}_0 \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{a}(G) = \left((a\ \cos(\theta) - R)\,\ddot{\theta} - a\,sin(\theta)\,\dot{\theta}^2\right)\vec{j}_0 + \left(a\,sin(\theta)\,\ddot{\theta} + a\ \cos(\theta)\,\dot{\theta}^2\right)\vec{k}_0}$$

7)

$$\boxed{\vec{R}_I = m\,(\vec{a}(G) - \vec{g})}$$

8)

$$\vec{M}_G(\vec{R}_I) = \overrightarrow{GI} \wedge \vec{R}_I = \left(a\,\vec{K} - R\,\vec{k}_0\right) \wedge \vec{R}_I$$

Soit en composantes dans la base $(\vec{i}_0\ ;\ \vec{j}_0\ ;\ \vec{k}_0)$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\,a\,sin(\theta) \\ a\ \cos(\theta) - R \end{pmatrix} \wedge m \begin{pmatrix} 0 \\ (a\ \cos(\theta) - R)\,\ddot{\theta} - a\,sin(\theta)\,\dot{\theta}^2 \\ a\,sin(\theta)\,\ddot{\theta} + a\ \cos(\theta)\,\dot{\theta}^2 + g \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{M}_G(\vec{R}_I) = m\,\left(-(a^2 - 2\,a\,R\ \cos(\theta) + R^2)\,\ddot{\theta} - a\,R\,sin(\theta)\,\dot{\theta}^2 - a\,g\,sin(\theta)\right)\vec{i}_0}$$

Soit en faisant les approximations de petits mouvements ;

$$\boxed{\vec{M}_G(\vec{R}_I) = m\left(-(a^2 - 2\,a\,R\ + R^2)\,\ddot{\theta} - a\,R\,\theta\,\dot{\theta}^2 - a\,g\,\theta\right)\vec{i}_0}$$

9)

$$\frac{d\,\vec{\sigma}(G)}{dt} = \vec{M}_G(\vec{R}_I)$$

$$J_X\,\ddot{\theta}\,\vec{\imath}_0 = m\left(-(a^2 - 2\,a\,R\ + R^2)\,\ddot{\theta} - a\,R\,\theta\,\dot{\theta}^2 - a\,g\,\theta\right)\vec{\imath}_0$$

$$\boxed{(J_X + m\,(R-a)^2)\,\ddot{\theta} = -m\,a\,R\,\theta\,\dot{\theta}^2 - mg\,a\,\theta}$$

L'équation n'étant pas linéaire, pour pouvoir la résoudre analytiquement, il faut supposer négligeable le terme en $\dot{\theta}^2$. L''équation devient alors :

$$\ddot{\theta} = -\frac{mg\,a}{J_X + m\,(R-a)^2}\,\theta$$

Soit :

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\,{\omega_0}^2\,\theta}$$

En posant :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\,a}{J_X + m\,(R-a)^2}}}$$

La période des oscillations libres est alors :

$$\boxed{T_0 = \frac{2\,\pi}{\omega_0}}$$