Contrôle d'électrostatique AI2 du 11 Avril 2015

(Enseignant : Laurent Gry)

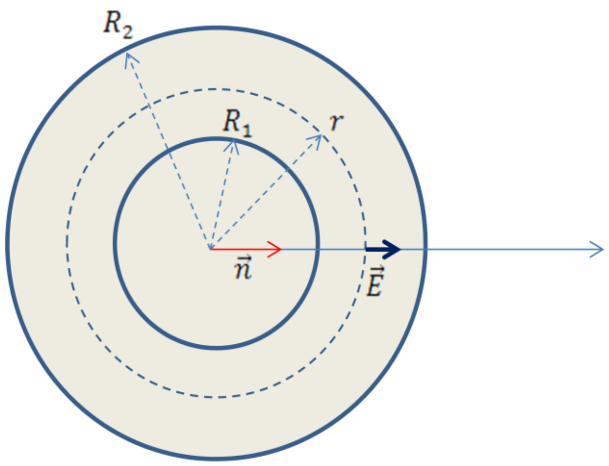
Exercice 1 : Théorème de Gauss (5 points)

1) En utilisant le théorème de Gauss, retrouver la valeur du champ électrostatique créé par une plaque plane portant une charge Q > 0 dans son voisinage, puis par deux plaques planes de même aire séparées par de l'air assimilé au vide (2,5 points)
2) En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrique créé par un fil rectiligne infini de densité linéique $= dq/dx$, le fil étant considéré comme un axe $(O\,;x)$. (2,5 points)

Exercice 2 : Capacité d'un condensateur sphérique (5 points)

On considère un condensateur formé par deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$, la sphère interne portant une charge électrique $Q > 0$ et la sphère externe une charge – Q. La symétrie de la distribution fait que le champ électrique $\vec{E}$ entre les deux sphères est radial et porté par un rayon. Nous pouvons donc poser :

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{n}$$



1) En utilisant le théorème de Gauss, déterminer $E(r)$ en fonction de la charge Q et de r (1 point)
2) En déduire d'expression du potentiel électrostatique $V(r)$ entre les deux sphères (1 point)
3) En déduire la tension $U = V(R_1) - V(R_2)$ du condensateur en fonction de R_1 , R_2 et ε_0 (1 point)
4) En déduire la capacité $C = Q/U$ du condensateur (1 point)

5) Calculer la charge Q pour $R_1 = 4\ cm$, $R_2 = 4{,}2\ cm$, $U = 1000\ V$ (1 point)
(On rappelle : $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$)

Problème : Champ créé par une demi-sphère (10 points)

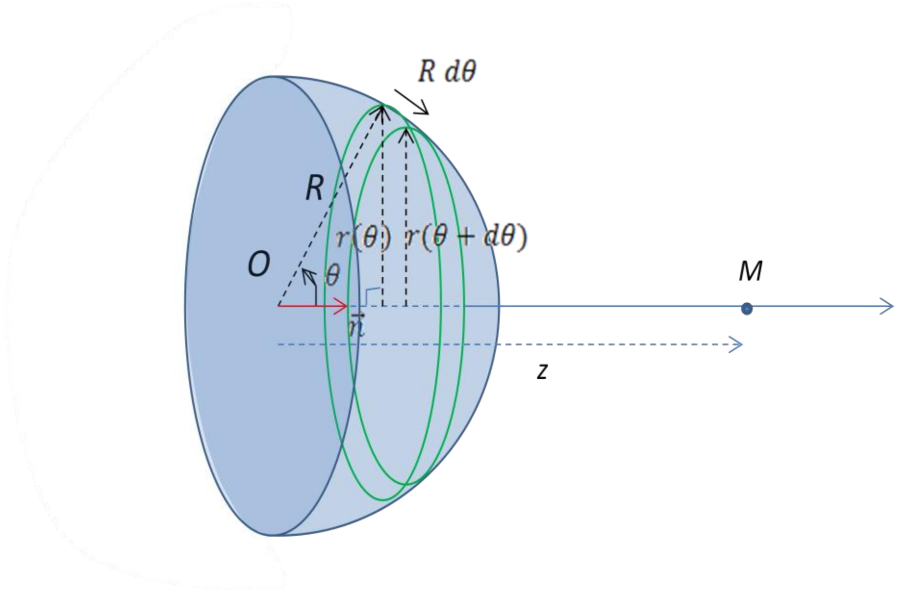
On considère une demi-sphère de rayon $R = 10\ cm$ uniformément chargée portant la charge Q. Le but de l'exercice est le calcul du champ électrique en un point de l'axe de symétrie (O ; $\vec{n}$) de la demi-sphère.

Contrairement à l'exercice précédent, nous allons commencer par déterminer le potentiel électrostatique en un point d'abscisse z > 0 sur cet axe et en déduire le champ électrique.

On rappelle la formule établie en cours pour le potentiel électrostatique créé par un cercle de rayon *r* uniformément chargé avec la charge *q*, à une distance *a* sur son axe de symétrie :

$$V(a) = \frac{q}{4\ \pi\ \varepsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

On peut alors diviser la demi-sphère en surfaces élémentaires, en considérant des cercles repérés par un angle θ tel que défini par la figure ci-dessous :



1) Déterminer le rayon $r(\theta)$ d'un cercle en fonction de R et de θ (0,5 point)
2) Déterminer l'aire d^1S de l'élément de surface différentiel situé entre les cercles de rayons $r(\theta)$ et $r(\theta + d\theta)$ (0,5 point)
3) En déduire l'aire de la demi-sphère par calcul intégral (0,5 point)

4) En déduire la densité surfacique de charges σ en fonction de R et Q (0,5 point)
5) En déduire la charge $d^1q = \sigma\, d^1S$ portée par l'élément de surface en fonction de *R*, de θ et de $d\theta$ (0,5 point)
6) Calculer le potentiel électrostatique *dV(z)* créé par l'élément de surface en un point d'abscisse z de l'axe. On pourra commencer par évaluer la distance $a(\theta)$ entre le point *M* et le centre du cercle repéré par θ (0,5 point)
7) En déduire l'expression intégrale du potentiel électrostatique créé par la demi-sphère en ce point (0,5 point)
8) Par changement de variable adéquat, calculer cette intégrale et montrer que le potentiel s'exprime pour tout z, par la formule (1 point) :

$$V(z) = \frac{2\, b\, R^2}{\sqrt{z^2 + R^2} + |z - R|}$$

en posant :

$$b = \frac{Q}{4\, \pi\, \varepsilon_0\, R^2}$$

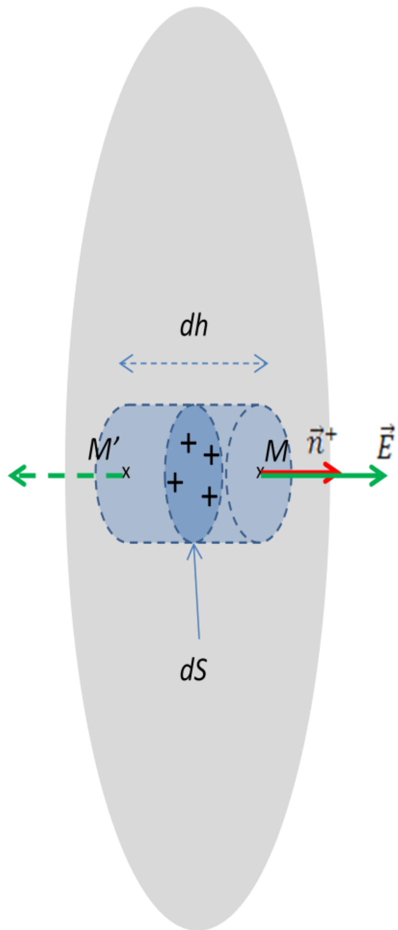
9) Vérifier que l'on retrouve la formule du potentiel créé par une charge ponctuelle lorsque l'on fait tendre *R* vers 0 (0,5 point)
10) Tracer l'allure de la courbe de potentiel $V(z)$ pour z réel (sans faire d'étude détaillée mais on fera apparaître les valeurs en *0*, en *R,* et en $\pm\infty$) et indiquer s'il y a continuité du potentiel le long de l'axe ? (1 point)
11) Exprimer la composante $E_z(z)$ du champ électrique sur l'axe (O ; $\vec{n}$) en fonction de *b*, *z* et *R* (1 point)
12) Calculer $E_z(0)$, $E_z(R/2)$, $E_z(R^-) = \lim_{\substack{z \to R \\ z<R}} E_z(z)$, $E_z(R^+) = \lim_{\substack{z \to R \\ z>R}} E_z(z)$. Y a-t-il continuité du champ en z = R ? (1 point)
13) Calculer $E_z(R^+) - E_z(R^-)$ et comparer cette valeur à celle donnée par le théorème de Gauss. L'hypothèse d'une sphère uniformément chargée et en équilibre est elle en accord avec le résultat obtenu ? (1 point)
14) Tracer l'allure de la courbe du champ $E_z(z)$ le long de l'axe (on fera apparaître les valeurs en *0*, en *R,* et en $\pm\infty$) (1 point)

CORRECTION

Exercice 1 :

1)

On considère un cylindre infinitésimal de hauteur dh entourant une surface dS portant la charge $dq = \sigma\, dS$



Le champ $\vec{E}$ est, sur une des bases du cylindre, normal, constant et de même sens que la normale sortante $\vec{n}^+$, sur l'autre base, opposé à ce dernier, et en tout point de la surface latérale du cylindre, dans le plan tangent à cette surface.

Seules les bases contribuent donc au flux sortant. En posant :

$$\vec{E} = E\,\vec{n}^+$$

Le flux sortant à travers ces bases est alors :

$$d\varphi = \vec{E}\cdot dS\,\vec{n}^+ + \left(-\vec{E}\right)\cdot dS(-\vec{n}^+) = 2\,E\,\vec{n}^+\cdot dS\,\vec{n}^+ = 2\,E\,dS$$

Le théorème de Gauss donne alors :

$$d\varphi = \frac{dq}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\, dS}{\varepsilon_0}$$

On en déduit :

$$E = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}$$

Soit :

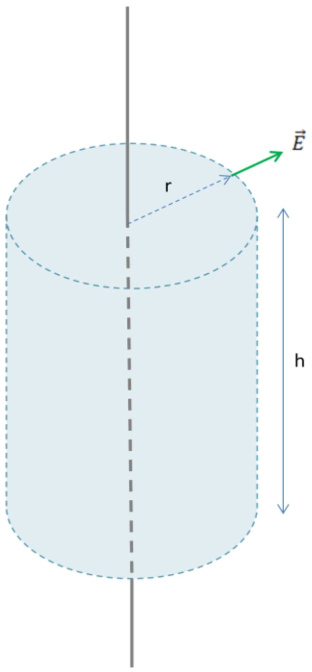
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\vec{n}^{\,+}}$$

On en déduit, pour deux plaques planes disposées parallèlement et de façon très proches, le champ électrique situé entre ces deux plaques et à distance de leurs bords :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{n}^{\,+}}$$

2)

La symétrie de la distribution fait que le champ, dans un plan perpendiculaire à l'axe du fil, est dans ce plan et radial, ne dépendant que de la distance r à ce fil.



Considérons alors un cylindre de hauteur h et de rayon r, dont l'axe de révolution est le fil. Cette fois-ci, seule la surface latérale de ce cylindre contribue au flux sortant du champ électrique. Notons alors, en un point de la surface latérale, le champ électrique sous la forme :

$$\vec{E} = E(r)\, \vec{n}^{\,+}$$

Le flux à travers la surface latérale est alors :

$$\varphi = E(r) \times 2\,\pi\, r\, h$$

Or le cylindre enferme la charge :

$$Q = \lambda\, h$$

Le théorème de Gauss donne alors :

$$E(r) \times 2\,\pi\, r\, h = \frac{\lambda\, h}{\varepsilon_0}$$

Soit :

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\,\pi\, \varepsilon_0\, r}$$

Finalement :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\,\pi\, \varepsilon_0\, r}\, \vec{n}^{\,+}}$$

Exercice 2 :

1)

$$E(r) \times 4\,\pi\,r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E(r) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}}$$

2)

$$E(r) = -\frac{dV}{dr}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r} + constante$$

Soit, en prenant le potentiel nul quand r tend vers l'infini :

$$\boxed{V(r) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r}}$$

3)

$$U = V(R_1) - V(R_2)$$

$$\boxed{U = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{R_2 - R_1}{R_1\,R_2}}$$

4)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R_1\,R_2}{R_2 - R_1}$$

5)

$$Q = C\,U = \frac{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R_1\,R_2}{R_2 - R_1}\,U = \frac{4 \times 4{,}2 \times 10^{-2}}{9 \times 10^{9}\,(4{,}2 - 4)} \times 10^{3} = 8{,}4 \times 10^{-8}\,C$$

Problème :

1)

$$\boxed{r(\theta) = R\sin(\theta)}$$

2)

$$\boxed{d^1S = 2\,\pi\, r(\theta)\; R\; d\theta = 2\,\pi\, R^2 \sin(\theta)\;\; d\theta}$$

3)

$$\boxed{S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,\pi\, R^2 \sin(\theta)\;\; d\theta = 2\,\pi\, R^2[-\cos(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \;2\,\pi\, R^2}$$

4)

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{2\,\pi\, R^2}}$$

5)

$$\boxed{d^1q = \;\sigma\; d^1S = Q\;\;\sin(\theta)\;\; d\theta}$$

6)

$$dV(z) = \frac{d^1q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{r^2(\theta) + a^2(\theta)}} = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{R^2\; sin^2(\theta) + (z - R\cos(\theta))^2}}$$

$$\boxed{dV(z) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2\;R\;z\cos(\theta)}}}$$

7)

$$\boxed{V(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2\;R\;z\cos(\theta)}}\;\, d\theta}$$

8)

On fait, pour $z \neq 0$, le changement de variable :

$$\begin{cases} t = z^2 + R^2 - 2\;R\;z\cos(\theta) \\ \quad dt = 2\;R\;z\;\;\sin(\theta)\;\; d\theta \end{cases}$$

$$V(z) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \int_{z^2+R^2-2\,R\,z}^{z^2+R^2} \frac{1}{2\;R\;z\sqrt{t}}\; dt = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\; R\; z}\;\left[\sqrt{t}\right]_{z^2+R^2-2\,R\,z}^{z^2+R^2}$$

$$V(z) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{\sqrt{z^2 + R^2} - \sqrt{z^2 + R^2 - 2\,R\,z}}{R\,z} = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{(z^2 + R^2) - (z^2 + R^2 - 2\,R\,z)}{R\,z\left(\sqrt{z^2 + R^2} + \sqrt{z^2 + R^2 - 2\,R\,z}\right)}$$

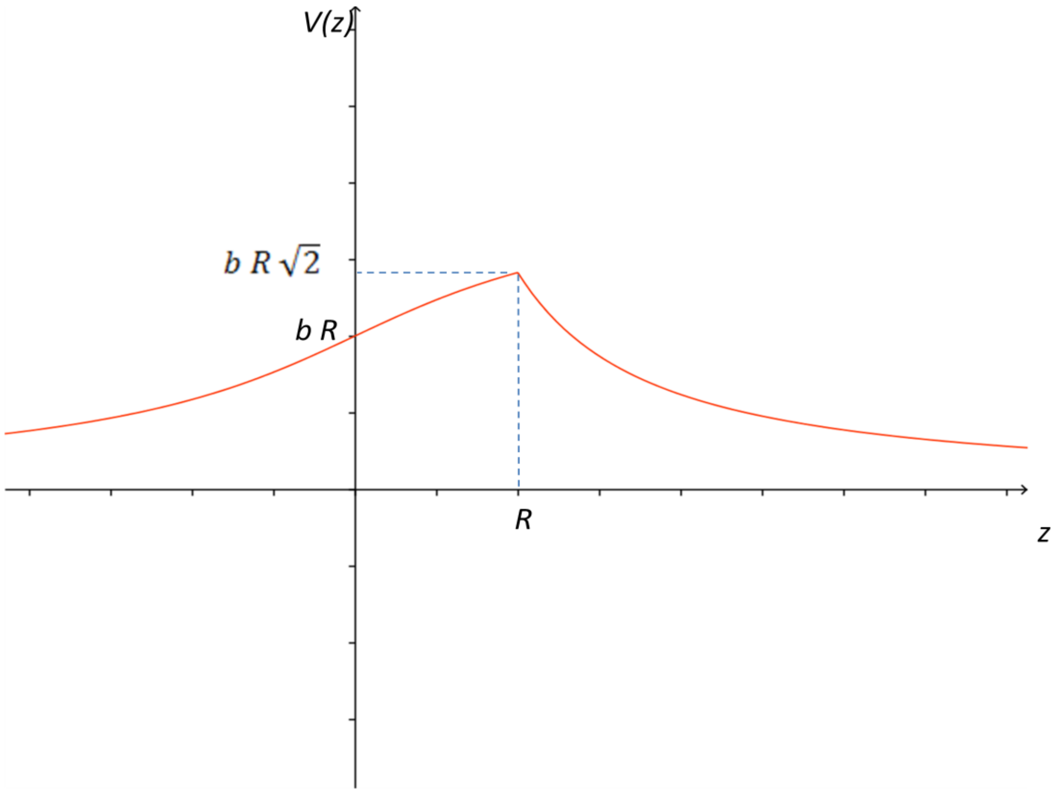
$$\boxed{V(z) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{2}{\sqrt{z^2 + R^2} + \sqrt{z^2 + R^2 - 2\,R\,z}} = \frac{2\,b\,R^2}{\sqrt{z^2 + R^2} + |z - R|}}$$

9)

Si on fait tendre R vers 0, le potentiel tend vers l'expression :

$$\boxed{V(z) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{|z|}}$$

10)



11)

$$E_z(z) = -\frac{dV}{dz} = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \frac{z - R}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2R\,z}}}{\left(\sqrt{z^2 + R^2} + |z - R|\right)^2}$$

$$\boxed{E_z(z) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\left(\sqrt{z^2 + R^2} + |z - R|\right)^2} \times \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \frac{z - R}{|z - R|}\right)}$$

Soit si $z < R$:

$$\boxed{E_z(z) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\left(\sqrt{z^2+R^2}+R-z\right)^2} \times \left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} - 1\right)}$$

et si $z > R$:

$$\boxed{E_z(z) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\left(\sqrt{z^2+R^2}+z-R\right)^2} \times \left(\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} + 1\right)}$$

12)

$$E_z(0) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{4\,R^2} \times (-1) = -0\ 5\ b$$

$$E_z\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{4}{R^2\left(\sqrt{5}+1\right)^2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - 1\right) \approx -0{,}42\ b$$

$$E_z(R^-) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{2\,R^2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) \approx -0{,}29\ b$$

$$E_z(R^+) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{2\,R^2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) \approx 1{,}7\ b$$

13)

$$\boxed{E_z(R^+) - E_z(R^-) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Ce résultat est en accord avec l’hypothèse d’un conducteur en équilibre électrostatique pour lequel le théorème de Gauss conduit à :

$$\boxed{E_z(R^+) - E_z(R^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

14)