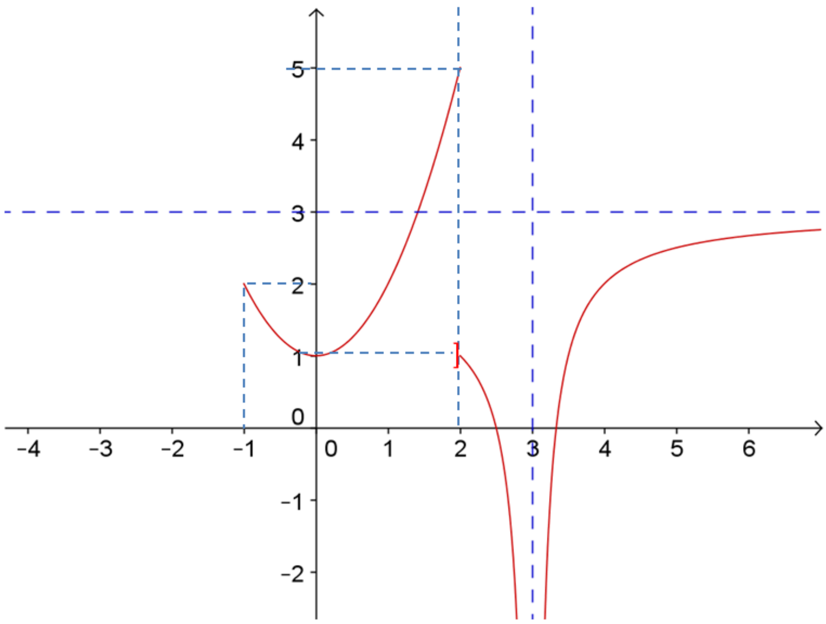
Continuité des fonctions numériques

I Introduction

La continuité vise à traduire l'aspect précisément continu, c'est-à-dire sans rupture de la courbe représentative d'une fonction. Ainsi dans l'exemple donné par la figure ci-dessous, la fonction sera considérée comme continue en -1, et plus précisément continue à droite en -1 mais pas à gauche car elle n'y est pas définie, continue en 0, et d'ailleurs à gauche et à droite, continue à gauche en 2, mais pas à droite, non continue en 3, car tout simplement pas définie.

Plus précisément, cette fonction sera considérée comme continue sur l'ensemble :

$$[-1; 2[\cup]2; 3[\cup]3; +\infty[$$



Nous allons préciser toutes ces notions avec toute la rigueur mathématique.

II Définition

Soit une fonction f définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$

On dit que x_0 est un point isolé de D_f si

$$\exists\ \alpha \in]0;+\infty[\ :\ ]x_0-\alpha\ ;\ x_0+\alpha[\ \cap D_f=\emptyset$$

Nous dirons que f est localement définie à gauche en x_0 si :

$$\exists\ \alpha \in]0;+\infty[\ :\ ]x_0-\alpha\ ;\ x_0] \subset D_f$$

Nous dirons que f est localement définie à droite en x_0 si :

$$\exists\ \alpha \in]0;+\infty[\ :\ [x_0\ ;\ x_0+\alpha[\ \subset D_f$$

On dit que f est continue à droite en x_0 si x_0 est un point isolé de D_f ou si f est localement définie à droite en x_0 et vérifie :

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$$

On dit que f est continue à gauche en x_0 si x_0 est est un point isolé de D_f ou si f est localement définie à gauche en x_0 et vérifie :

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$$

On dit que f est continue en x_0 si x_0 est un point isolé de D_f ou si f est continue à gauche en x_0 et non localement définie à droite ou si f est continue à droite en x_0 et non localement définie à gauche ou si f est continue à gauche et à droite en x_0

II Propriétés

Dans toute la suite f et g désignent deux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f \cap D_g$

1) Somme

Si f et g sont continues en x_0 (resp. à droite, à gauche) alors la fonction somme $f+g$ est continue en x_0 (resp. à droite, à gauche)

2) Produit

Si f et g sont continues en x_0 (resp. à droite, à gauche) alors la fonction produit $f \times g$ est continue en x_0 (resp. à droite, à gauche)

3) Inverse

Si f est continue en x_0 (resp. à droite, à gauche) et $f(x_0) \neq 0$ alors la fonction inverse $1/f$ est continue en x_0 (resp. à droite, à gauche)

4) Quotient

Si f et g sont continues en x_0 (resp. à droite, à gauche) et $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction quotient f/g est continue en x_0 (resp. à droite, à gauche)

Preuves :

Ce sont des conséquences immédiates des propriétés sur les limites

III Composée de fonctions continues

Soit une fonction g définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in D_g$ et une fonction f définie sur une partie de $\mathbb{R}$ telle que $g(x_0) \in D_f$ alors

Si g est continue en x_0 (resp. à droite, à gauche) et f est continue en $g(x_0)$ alors la composée $f \circ g$ est continue en x_0 (resp. à droite, à gauche)

Preuve

C'est encore une conséquence immédiate sur la limite d'une composée de fonctions

IV fonctions continues de référence

1) Polynômes

Les fonctions constantes $f(x) = b$, les fonctions affines $f(x) = a\,x + b$, les fonctions trinômes $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, plus généralement, toutes les fonctions polynômiales, c'est-à-dire de la forme :

$$f(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0$$

Preuve :

Montrons d'abord que la fonction $f(x) = x$ est continue sur $\mathbb{R}$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et un réel $\varepsilon > 0$ alors en posant :

$$\alpha = \varepsilon$$

On a :

$$x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha \quad \Rightarrow \; f(x_0) - \varepsilon \; < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

Donc

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

f est donc continue sur $\mathbb{R}$

Un raisonnement par récurrence évident permet alors d'en déduire par la propriété de produit vue précédemment que les fonctions puissances entières naturelles non nulles $f(x) = x^n$ sont continues sur $\mathbb{R}$

Or il est trivial de vérifier qu'une fonction constante est continue sur $\mathbb{R}$

Les fonctions de la forme $f(x) = a\,x^n$ où a est un réel quelconque sont donc continues sur $\mathbb{R}$.

Par une récurrence évidente, tout polynôme est alors une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en utilisant la propriété de la somme.

2) Fractions rationnelles

Les fractions rationnelles qui sont le quotient de deux polynômes sont continues sur leur domaine de définition.

Preuve :

Il suffit de considérer la propriété précédente et la propriété du quotient

3) Fonctions trigonométriques

Nous verrons plus loin, avec l'étude des séries, que les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$ et donc toutes les fonctions résultant d'opérations usuelles pouvant être faites avec ces fonctions :

Exemple :

$$f(x) = \frac{3\cos(2\,x) + x\sin(5\,x)}{2 + \sin^2(x)}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, son dénominateur ne s'annulant pas car :

$$\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R} :\ 1 \leq \sin(\mathrm{x}) \leq 1$$

$$-1 \leq \sin^2(x) \leq 1$$

$$2 \leq 2 + \sin^2(x)) \leq 3$$

V fonctions continues sur un intervalle

1) Caractère borné d'une fonction continue

Soit une fonction $\boldsymbol{f}$ définie et continue sur un intervalle $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ de $\mathbb{R}$ alors $\boldsymbol{f}([\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}])$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$

Preuve

Par l'absurde, supposons f non majorée alors pour $A = n \in \mathbb{N}^*$:

$$\exists\ U_n \in [a;b]\ :\ f(U_n) > n$$

La suite U étant bornée, on peut, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, en extraire une sous-suite convergente V . Posons donc :

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = L$$

Notons alors que l'on a :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ :\ a \leq V_n \leq b$$

On en déduit, par passage à la limite :

$$a \leq L \leq b$$

Puis par continuité de f en L :

$$\lim_{n\to+\infty} f(V_n) = f(L)$$

Or, on a également :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ :\ f(V_n) > n$$

Donc, par le théorème du gendarme minorant :

$$\lim_{n\to+\infty} f(V_n) = +\infty$$

Cela est contradictoire, donc f est majorée

La fonction $-f$ étant continue on en déduit qu'elle est majorée donc que f est minorée.

2) Propriété de la borne supérieure

Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ alors $f([a;b])$ possède une borne inférieure et une borne supérieure atteintes par la fonction, autrement dit :

$$\boxed{\exists\ (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) \in [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]^2 :\ \forall\ \mathbf{x} \in [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]\ :\ \boldsymbol{f}(\mathbf{x_1}) \leq \boldsymbol{f}(\mathbf{x}) \leq \boldsymbol{f}(\mathbf{x_2})}$$

Preuve :

$f([a;b])$ étant bornée, elle possède une borne supérieure s et une borne inférieure i. Donc

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^* :\ \exists\ U_n \in [a;b]\ \ :\ \ s - \frac{1}{n} \leq f(U_n) \leq s$$

La suite U étant bornée, on peut, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, en extraire une sous-suite V convergente. Posons donc :

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = L$$

Notons alors que l'on a :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ :\ a \leq V_n \leq b$$

On en déduit, par passage à la limite :

$$a \leq L \leq b$$

Puis par continuité de f en L :

$$\lim_{n \to +\infty} f(V_n) = f(L)$$

Or, on a également :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ :\ s - \frac{1}{n} \leq f(V_n) \leq s$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \to +\infty} f(V_n) = s$$

D'où

$$s = f(L)$$

La borne supérieure est donc atteinte

La fonction $-f$ étant continue on en déduit qu'elle atteint sa borne supérieure, donc :

$$\exists\, \mathrm{x}_1 \in [a;b] : \ \forall\, \mathrm{x} \in [a;b] \ : -f(\mathrm{x}) \ \leq -f(\mathrm{x}_1)$$

Soit :

$$\forall\, \mathrm{x} \in [a;b] \ : f(\mathrm{x}_1) \leq f(\mathrm{x})$$

La borne inférieure de f est donc atteinte

3) Propriété de la valeur intermédiaire

Soit une fonction $\boldsymbol{f}$ définie et continue sur un intervalle $\boldsymbol{J}$ de $\mathbb{R}$ alors $\boldsymbol{f(J)}$ est un intervalle, autrement dit :

$$\boxed{\forall\, (\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \mathbf{y}) \in \left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{J})\right)^2 \times \mathbb{R} \ : \ \ \mathbf{y_1} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y_2} \ \Rightarrow \ \exists\, \mathbf{x} \in \boldsymbol{J} : \ \mathbf{y} = \boldsymbol{f}(\mathbf{x})}$$

On dit alors de la fonction $\boldsymbol{f}$ qu'elle possède la propriété de la valeur intermédiaire : Si elle prend deux valeurs $\mathbf{y_1}$ et $\mathbf{y_2}$ alors elle prend toute valeur $\mathbf{y}$ située entre ces valeurs.

Preuve

Soit $(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2) \in \left(f(J)\right)^2$ et $\mathrm{y} \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{y}_1 \leq \mathrm{y} \leq \mathrm{y}_2$ alors :

$$\exists\, (x_1, x_2) \in J^2 \ : \ y_1 = f(x_1) \ \ et \ \ y_2 = f(x_2)$$

Supposons par exemple : $x_1 < x_2$:

Construisons alors deux suites adjacentes U et V de la façon suivante :

On pose :

$$U_0 = x_1$$

$$V_0 = x_2$$

On note :

$$C_0 = \frac{U_0 + V_0}{2}$$

Si : $f(C_0) < y$ on pose :

$$U_1 = C_0$$

$$V_1 = V_0$$

Sinon :

$$U_1 = U_0$$

$$V_1 = C_0$$

On a alors :

$$f(U_1) < y \leq f(V_1)$$

Supposons construits par récurrence U_n et V_n tels que :

$$f(U_n) < y \leq f(V_n)$$

on note :

$$C_n = \frac{U_n + V_n}{2}$$

Si : $f(C_n) < y$ on pose :

$$U_{n+1} = C_n$$

$$V_{n+1} = V_n$$

Sinon :

$$U_{n+1} = U_n$$

$$V_{n+1} = C_n$$

On a alors :

$$f(U_{n+1}) < y \leq f(V_{n+1})$$

Ainsi construites, les deux suites vérifient :

$$\forall \text{ n} \in \mathbb{N} : \ f(U_n) < y \leq f(V_n) \ \text{ et } \ V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{V_n - U_n}{2}$$

Une récurrence évidente conduit à :

$$\forall \text{ n} \in \mathbb{N} \ : V_n - U_n = \frac{V_0 - U_0}{2^n}$$

De plus U est croissante V décroissante et :

$$\forall \, \mathrm{n} \in \mathbb{N} \; : x_1 \leq U_n \leq V_n \leq x_2$$

Les suites U et V sont donc adjacentes et convergent donc vers une limite commune L et par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus on a :

$$x_1 \leq L \leq x_2$$

Par continuité de f en L on en déduit que :

$$\lim_{\mathrm{n}\to+\infty} f(U_n) = \lim_{\mathrm{n}\to+\infty} f(V_n) = f(L)$$

Et de l'encadrement :

$$f(U_n) < y \leq f(V_n)$$

on déduit, par passage à la limite :

$$f(L) \leq y \leq f(L)$$

D'où

$$y = f(L)$$

Le cas où $x_1 > x_2$ se traite de façon analogue et le cas $x_1 = x_2$ est trivial

4) <u>Stricte monotonie d'une fonction continue injective</u>

Soit une fonction f définie, continue et injective sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ alors f est strictement monotone sur J

<u>Preuve</u>

Supposons par l'absurde que la fonction injective ne soit ni strictement croissante, ni strictement décroissante sur l'intervalle J, alors :

$$\exists \, (a,b,c,d) \in J^4 \; : \big(a < b \;\text{ et }\; f(a) > f(b)\big) \quad , \quad \big(c < d \;\text{ et }\; f(c) < f(d)\big)$$

Par disjonctions de cas, il est aisé d'en déduire :

$$\exists \, (x_1, x_2, x_3) \in J^3 \; : x_1 < x_2 < x_3 \;\text{ et}$$

$$(\, f(x_1) < f(x_2) \;\text{ et }\; f(x_2) > f(x_3)\,) \;\text{ ou }\; (\, f(x_1) > f(x_2) \;\text{ et }\; f(x_2) < f(x_3)\,)$$

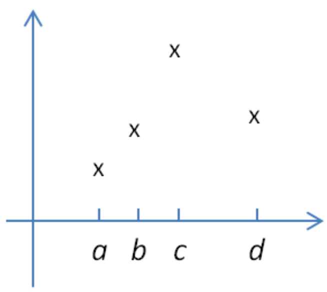


Figure 1

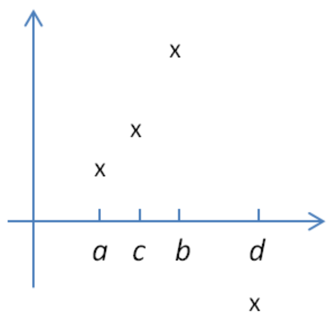


Figure 2

Deux cas sont illustrés en exemple sur les figures ci-dessus :

Pour la figure 1 : $x_1 = a$, $x_2 = c$, $x_3 = d$

Pour la figure 2 : $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = d$

Le théorème des valeurs intermédiaires montre alors à l'évidence que f ne peut être injective.

Dans le cas de la figure 1 par exemple, on prend $y \in]f(x_1); f(x_2)[\cap]f(x_3); f(x_2)[$ et on a :

$$\exists\ (x_4, x_5) \in J^2 \ : x_1 < x_4 < x_2 \ \text{ et } \ x_2 < x_5 < x_3 \ \text{ et } \mathrm{y} = f(x_4) = f(x_5)$$

<u>V Réciproque d'une fonction continue sur un intervalle</u>

Soit une fonction f définie, continue et injective, donc strictement monotone sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ alors f est une bijection de J sur $f(J)$ qui est un intervalle K.

L'application réciproque f^{-1} est alors une fonction continue sur l'intervalle K

<u>Preuve</u> :

Supposons par exemple f strictement croissante sur K

Soit $y_0 \in K$, supposons par exemple f^{-1} localement définie à droite de y_0 soit :

$$\exists\ \beta > 0 : \ [y_0 \,; \ y_0 + \beta] \subset K$$

Notons :

$$f^{-1}(y_0) = x_0$$

$$f^{-1}(y_0 + \beta) = x_0 + \alpha$$

Soit $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists\, \gamma > 0 :\ \gamma < \varepsilon \ \text{ et } \ \gamma < \alpha$$

Posons :

$$\delta = f(x_0 + \gamma) - f(x_0) > 0$$

Soit :

$$f(x_0 + \gamma) = f(x_0) + \delta = y_0 + \delta$$

Donc :

$$f^{-1}(y_0 + \delta\,) = x_0 + \gamma = f^{-1}(y_0\,) + \gamma$$

Alors puisque f^{-1} est strictement croissante comme f :

$$\forall\, y \in \mathbb{R} :\quad y_0 < y < y_0 + \delta \ \Rightarrow\ f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \delta\,)$$

$$\Rightarrow\ f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \gamma$$

$$\Rightarrow\ f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon$$

Donc :

$$\lim_{y \to {y_0}^+} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$$

f^{-1} est donc continue à droite en y_0

La même démarche montrerait que si elle est localement définie à gauche, elle est continue à gauche.