# *Continuité*

# *dans les espaces vectoriels normés généraux*

Un espace vectoriel normé étant un espace métrique particulier, la définition est celle donnée dans le fichier consacré à la topologie des espaces métriques. Voyons les propriétés additionnelles.

Dans toute la suite $f$ et $g$ désignent deux fonctions d'un espace vectoriel normé $(\mathbb{E}, N)$ dans un espace vectoriel normé $(\mathbb{E}', N')$

## I **Espace vectoriel des fonctions continues sur un domaine** :

### 1) **Continuité de la somme**

$$\left.\begin{aligned}\lim_{X\to A} \boldsymbol{f(X) = L}\\ \lim_{X\to A} \boldsymbol{g(X) = L'}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{X\to A} \boldsymbol{f(X) + g(X) = L + L'}$$

**En particulier**, **Si $f$ et $g$ sont continues en $A$ alors $f+g$ est continue en $A$**

**L'ensemble des fonctions continues sur une partie $\mathbb{G}$ de $\mathbb{E}$ est donc un espace vectoriel.**

Preuve :

$$N'\Big(\big(f(X)+g(X)\big)-(L+L')\Big) = N'\big((f(X)-L)+N'(g(X)-L')\big)$$

$$\leq N'(f(X)-L) \ + N'(g(X)-L')$$

Pour tout $\varepsilon \in ]0, +\infty[$ :

$$\exists\, \beta_1 \in ]0, +\infty[ \ : \ \forall\, X \ \in \mathbb{B}_d(A, \beta_1)\backslash\{A\} : N'(f(X)-L) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists\, \beta_2 \in ]0, +\infty[ \ : \ \forall\, X \ \in \mathbb{B}_d(A, \beta_2)\backslash\{A\} : N'(g(X)-L') < \frac{\varepsilon}{2}$$

En prenant : $\beta_3 = \max(\beta_1, \beta_2)$

$$\forall X \in \mathbb{B}_d(A,\beta_3)\backslash\{A\} : N'\Big(\big(f(X)+g(X)\big)-(L+L')\Big) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

## 2) Continuité du produit par un réel

$$\boxed{\lim_{X\to A} \boldsymbol{f(X)=L} \Rightarrow \lim_{X\to A} \boldsymbol{\lambda\, f(X)=\lambda\, L}}$$

**En particulier, Si $f$ est continue en $A$ alors pour tout réel $\lambda$, $\lambda\, f$ est continue en $A$.**

Preuve :

dans le cas non trivial $\lambda \neq 0$ :

$$N'(\lambda\, f(X)-\ \lambda\, L) = |\lambda|\, N'(f(X)-\ L)$$

Pour tout $\varepsilon \in \,]0,+\infty[$ :

$$\exists\, \beta_1 \in \,]0,+\infty[\ :\ \forall X \in \mathbb{B}_d(A,\beta_1)\backslash\{A\} : N'(f(X)-L) < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

La propriété en découle.

## 3) Continuité sur un domaine

**Si $f$ est continue en $A$ en tout point d'un domaine $\mathfrak{D}$ alors on dit que $f$ est continue sur $\mathfrak{D}$. L'ensemble des fonctions continues sur $\mathfrak{D}$ forme alors un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}'$ que nous noterons $\mathcal{C}_0(\mathfrak{D})$**

## II Continuité de la norme

**Une norme $N$ définie sur un espace vectoriel $\mathbb{E}$ définit une application continue de l'espace métrique $\mathbb{E}$ muni de la distance associée, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ muni de la distance associée à la valeur absolue.**

Preuve :

Rappelons la propriété d'une norme :

$$|N(X) - N(Y)| \leq N(X - Y)$$

La continuité s'en déduit trivialement

## III Continuité et norme d'une application linéaire

### 1) Continuité en dimension finie

**Une application linéaire $f$ d'un espace vectoriel de dimension finie normé $(\mathbb{E}, N)$ dans un espace vectoriel normé quelconque $(\mathbb{E}', N')$ est une application continue sur $\mathbb{E}$**

Preuve :

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de $\mathbb{E}$ et $X = x_1\,\overrightarrow{e_1} + x_2\,\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$ alors :

$$f(X) = x_1\,f(\overrightarrow{e_1}) + x_2\,f(\overrightarrow{e_2}) + \cdots + x_n f(\overrightarrow{e_n})$$

$$N'\big(f(X)\big) \leq |x_1|\,N'\big(f(\overrightarrow{e_1})\big) + |x_2|\,N'\big(f(\overrightarrow{e_2})\big) + \cdots + |x_n|\,N'\big(f(\overrightarrow{e_n})\big)$$

$$N'\big(f(X)\big) \leq (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)\,sup\Big(N'\big(f(\overrightarrow{e_1})\big), N'\big(f(\overrightarrow{e_2})\big), \dots, N'\big(f(\overrightarrow{e_n})\big)\Big)$$

En posant :

$$M = sup\Big(N'\big(f(\overrightarrow{e_1})\big), N'\big(f(\overrightarrow{e_2})\big), \dots, N'\big(f(\overrightarrow{e_n})\big)\Big)$$

$$N'\big(f(X)\big) \leq M\,N_1(X)$$

Donc :

$$N'\big(f(X)-f(Y)\big)=N'\big(f(X-Y)\big)\leq M\,N_1(X-Y)$$

Or toutes les normes étant équivalentes sur $\mathbb{E}$, il existe un réel $\alpha>0$ tel que :

$$N'\big(f(X)-f(Y)\big)\leq M\alpha\,N(X-Y)$$

La continuité de $f$ relativement aux normes $N_1$ et $N'$ s'en déduit aisément.

2) **<u>Continuité en dimension quelconque - Norme d'une application linéaire</u>**

**Une application linéaire $\boldsymbol{f}$ d'un espace vectoriel normé $(\mathbb{E},\boldsymbol{N})$ dans un espace vectoriel normé $(\mathbb{E}',\boldsymbol{N}')$ est une application continue sur $\mathbb{E}$ si et seulement si il existe un réel $\boldsymbol{k}$ tel que :**

$$\forall\,\boldsymbol{X}\in\mathbb{E}:\ \boldsymbol{N}'\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})\big)\leq\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{N}(\boldsymbol{X})$$

**On définit une norme sur l'espace vectoriel $\boldsymbol{\mathcal{L}_c}(\mathbb{E},\mathbb{E}')$ des applications linéaires de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}'$ continues sur $\mathbb{E}$ par :**

$$\forall\,\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{\mathcal{L}_c}(\mathbb{E},\mathbb{E}'):\ \ |||\boldsymbol{f}|||=\boldsymbol{sup}\left\{\frac{\boldsymbol{N}'\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})\big)}{\boldsymbol{N}(\boldsymbol{X})}:\ \boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}\right\}=\boldsymbol{sup}\big\{\boldsymbol{N}'\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})\big):\ \boldsymbol{N}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{1}\big\}$$

<u>Preuve :</u>

<u>Sens direct</u> :

Supposons $f$ linéaire et continue, alors pour $\varepsilon=1$ :

$$\exists\,\alpha>0:\ N(X)<\alpha\ \Rightarrow\ N'\big(f(X)\big)<1$$

Soit $X\neq 0$ alors :

$$N\left(\frac{\alpha}{2\,N(X)}\,X\right)=\frac{\alpha}{2}<\alpha$$

donc :

$$N'\left(f\left(\frac{\alpha}{2\,N(X)}\,X\right)\right)<1$$

soit par linéarité de $f$ puis propriété de la norme :

$$\frac{\alpha}{2\,N(X)}\ N'\big(f(X)\big) < 1$$

D’où :

$$N'\big(f(X)\big) < \frac{2}{\alpha}\ N(X)$$

Ce qui prouve la propriété en prenant :

$$k = \frac{2}{\alpha}$$

<u>Sens réciproque</u> :

Supposons $f$ linéaire et vérifiant :

$$\forall\, X \in \mathbb{E} :\ N'\big(f(X)\big) \leq k\, N(X)$$

Alors pour tout couple $(X, Y)$ de $\mathbb{E}^2$ on a :

$$N'(f(X) - f(Y)) \leq k\, N(X - Y)$$

Et la continuité s’en déduit aisément en tout point $Y$ de $\mathbb{E}$

<u>Norme</u> :

Soit $f \in \mathcal{L}_c(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$ on pose :

$$|||f||| = sup\{N'\big(f(X)\big) :\ N(X) = 1\}$$

alors :

Supposons $|||f||| = 0$ alors pour tout $X \neq 0$ on a :

$$N\left(\frac{1}{N(X)}X\right) = 1$$

donc :

$$N'\left(f\left(\frac{1}{N(X)}X\right)\right) \leq |||f||| = 0$$

d’où :

$$f\left(\frac{1}{N(X)}X\right) = 0$$

$$\frac{1}{N(X)}\,f(X) = 0$$

$$f(X) = 0$$

$f$ est donc l'application nulle de $\mathcal{L}_c(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$ d'où :

$$|||f||| = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

Soient $f, g$ dans $\mathcal{L}_c(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$ , $\lambda$ un réel et $X$ tel que $N(X) = 1$ alors :

$$N'\big((f+g)(X)\big) = N'\big(f(X) + g(X)\big) \leq N'\big(f(X)\big) + N'\big(g(X)\big)$$

Donc :

$$|||f+g||| \leq |||f||| + |||g|||$$

L'inégalité triangulaire est ainsi vérifiée

Enfin

$$N'\big(\lambda\, f(X)\big) = |\lambda|\, N'\big(f(X)\big)$$

Donc :

$$|||\lambda\, f||| = |\lambda|\; |||f|||$$

$|||f|||$ définit donc bien une norme sur $\mathcal{L}_c(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$

## 3) <u>Propriétés de la norme d'une application linéaire pour la composition</u>

**Soient $(\mathbb{E}, \boldsymbol{N})$ $(\mathbb{E}', \boldsymbol{N}')$ $(\mathbb{E}'', \boldsymbol{N}'')$ trois espaces vectoriels normés et $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{L}_c}(\mathbb{E}, \mathbb{E}')$, $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{\mathcal{L}_c}(\mathbb{E}', \mathbb{E}'')$ alors :**

$$\boldsymbol{g \circ f} \in \boldsymbol{\mathcal{L}_c}\big(\mathbb{E}, \mathbb{E}''\big)$$

$$|||\boldsymbol{g \circ f}||| \leq |||\boldsymbol{g}|||\; |||\boldsymbol{f}|||$$

<u>Preuve</u> :

Soit $X \in \mathbb{E}$ tel que $N(X) = 1$ alors :

$$N\big((g \circ f)(\mathrm{X})\big) = N\Big(g\big(f(X)\big)\Big) \leq |||g|||\, N\big(f(X)\big) \leq |||g|||\; |||f|||$$

donc :

$$|||g \circ f||| \leq |||g|||\ \ |||f|||$$

## IV Continuité et norme d'une application multilinéaire

1) Continuité en dimension finie

**Une application bilinéaire $f$ définie sur un produit $\mathbb{E} \times \mathbb{E}'$ d'espaces vectoriels normés de dimension finie à valeurs dans un espace vectoriel normé quelconque $(\mathbb{E}", N")$ est une application continue de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}'$ dans $\mathbb{E}"$, pour n'importe quelle norme définie sur $\mathbb{E} \times \mathbb{E}'$.**

**Une généralisation se fait sans peine à une application multilinéaire sur un produit quelconque $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \ldots \times \mathbb{E}_p$ d'espaces vectoriels normés à valeurs dans un espace vectoriel normé quelconque $(\mathbb{E}, N)$**

Preuve :

Notons $n$ la dimension de $\mathbb{E}$, $m$ celle de $\mathbb{E}'$ alors $\mathbb{E} \times \mathbb{E}'$ est un espace vectoriel de dimension $n \times m$. Toutes les normes sont donc équivalentes sur $\mathbb{E} \times \mathbb{E}'$. Il suffit alors d'étudier la continuité pour l'une d'elle, par exemple, celle associée à une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de $\mathbb{E}$, une base $\left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \ldots, \overrightarrow{f_m}\right)$ de $\mathbb{E}$, et à la norme infinie, sous la forme :

Pour :

$$X = x_1\, \overrightarrow{e_1} + x_2\, \overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n \overrightarrow{e_n}$$

$$Y = y_1\, \overrightarrow{f_1} + y_2\, \overrightarrow{f_2} + \cdots + y_m \overrightarrow{f_m}$$

$$N_\infty(X, Y) = \sup\big(N_\infty(X), N_\infty(Y)\big) = \sup(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|, |y_1|, |y_2|, \ldots, |y_m|)$$

Posons :

$$X = A + H$$

$$Y = B + K$$

$$A = a_1\,\overrightarrow{e_1} + a_2\,\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{e_n}$$

$$B = b_1\,\overrightarrow{f_1} + b_2\,\overrightarrow{f_2} + \cdots + b_m\overrightarrow{f_m}$$

$$H = h_1\,\overrightarrow{e_1} + h_2\,\overrightarrow{e_2} + \cdots + h_n\overrightarrow{e_n}$$

$$K = k_1\,\overrightarrow{f_1} + k_2\,\overrightarrow{f_2} + \cdots + k_m\overrightarrow{f_m}$$

alors :

$$f(X,Y) - f(A,B) = f(A+H, B+K) + f(A, Y-B)$$

$$= f(A,K) + f(H,B) + f(H,K)$$

Or :

$$f(A,K) = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} a_i\,k_j\,f\left(\overrightarrow{e_\imath},\overrightarrow{f_\jmath}\right)$$

En notant :

$$M = Sup\,\left\{N\left(a_i\,f\left(\overrightarrow{e_\imath},\overrightarrow{f_\jmath}\right)\right) :\ 1\le i\le n, 1\le j\le m\right\}$$

$$N\big(f(A,K)\big) \le M\,n\,m\,N_\infty(H,K)$$

De même en notant :

$$M' = Sup\left\{\left|b_j\,f\left(\overrightarrow{e_\imath},\overrightarrow{e_\jmath}\right)\right| :\ 1\le i\le n, 1\le j\le m\right\}$$

$$N\big(f(H,B)\big) \le M'n\,m\,N_\infty(H,K)$$

En outre :

$$f(H,K) = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} h_i\,k_j\,f\left(\overrightarrow{e_\imath},\overrightarrow{f_\jmath}\right)$$

D’où en notant :

$$M'' = Sup\left\{\left|f\left(\overrightarrow{e_\imath},\overrightarrow{f_\jmath}\right)\right| :\ 1\le i\le n, 1\le j\le m\right\}$$

$$N\big(f(A,K)\big) \le M"\,n\,m\,\left(N_\infty(H,K)\right)^2$$

D’où :

$$N\big(f(X,Y) - f(A,B)\big) \le (M+M')\,n\,m\,N_\infty(H,K) + M"\,n\,m\,\left(N_\infty(H,K)\right)^2$$

Soit alors $\varepsilon \in ]0, +\infty[$

Considérons la fonction réelle de la variable $t$ suivante

$$g(t) = (M + M')\, n\, m\, t + M"\, n\, m\, t^2$$

$g$ a pour limite 0 quand $t$ tend vers 0 donc :

$$\exists\, \beta > 0 \,:\, \forall\, t \in ]-\beta; \beta[\,:\, g(t) < \varepsilon$$

Or :

$$N_\infty\big((X, Y) - (A, B)\big) = N_\infty(X - A, Y - B) = N_\infty(H, K)$$

Donc :

$$N_\infty\big((X, Y) - (A, B)\big) < \beta \Rightarrow N\big(f(X, Y) - f(A, B)\big) < \varepsilon$$

ce qui traduit la continuité de $f$ en $(A, B)$

## 2) Conséquences

**Un produit scalaire $f$ défini sur un espace vectoriel de dimension finie normé $\mathbb{E}$ est une application continue de l'espace $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ dans $\mathbb{R}$, pour n'importe quelle norme définie sur $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$.**

**Le déterminant dans une base d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie $p$ étant une forme $p$ –linéaire, c'est une application continue de $\mathbb{E}^p$ dans $\mathbb{R}$, pour n'importe quelle norme définie sur $\mathbb{E}^p$.**

**Le produit vectoriel sur un espace vectoriel $\mathbb{E}$ euclidien de dimension finie $p$ étant une application $(p-1)$–linéaire, c'est une application continue de $\mathbb{E}^{p-1}$ dans $\mathbb{E}$.**

## 3) Continuité en dimension quelconque

**Soient** $(\mathbb{E}, \boldsymbol{N}), (\mathbb{E}', \boldsymbol{N}'), (\mathbb{E}", \boldsymbol{N}")$ **trois espaces vectoriels normés et** $\boldsymbol{f}$ **une application bilinéaire de** $\mathbb{E} \times \mathbb{E}'$ **muni de la norme usuelle** $N_\infty$ **ou toute autre norme équivalente**, à valeurs **dans** $\mathbb{E}"$**, alors** $\boldsymbol{f}$ **est continue si et seulement si il existe un réel** $\boldsymbol{k}$ **tel que :**

$$\forall\, (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in \mathbb{E} :\ \boldsymbol{N}"\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\big) \leq \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{N}(\boldsymbol{X})\ \boldsymbol{N}'(\boldsymbol{Y})$$

**La propriété s'étend à une application** $\boldsymbol{f}$ **multilinéaire sur un produit quelconque** $\mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \dots \times \mathbb{E}_p$ **d'espaces vectoriels normés à valeurs dans un espace vectoriel normé quelconque** $(\mathbb{E}, \boldsymbol{N})$ **sous la forme :**

$$\forall\, \left(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \dots, \boldsymbol{X}_p\right) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2 \times \dots \times \mathbb{E}_p :$$

$$\boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \dots, \boldsymbol{X}_p\big)\right) \leq \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{N}_1(\boldsymbol{X}_1)\boldsymbol{N}_2(\boldsymbol{X}_2) \dots \boldsymbol{N}_p(\boldsymbol{X}_p)$$

<u>Preuve :</u> Cas bilinéaire, l'extension se faisant sur le même principe

<u>Sens direct</u> :

Supposons $f$ linéaire et continue, alors pour $\varepsilon = 1$ :

$$\exists\, \alpha > 0 :\ N_\infty\,(X, Y) < \alpha\ \Rightarrow\ N"\big(f(X, Y)\big) < 1$$

Soit $X \neq 0$ et $Y \neq 0$ alors :

$$N\left(\frac{\alpha}{2\,N(X)}\ X\right) = \frac{\alpha}{2} < \alpha$$

$$N'\left(\frac{\alpha}{2\,N'(Y)}\ Y\right) = \frac{\alpha}{2} < \alpha$$

$$N_\infty\ \left(\frac{\alpha}{2\,N(X)}\ X, \frac{\alpha}{2\,N'(Y)}\ Y\right) = \frac{\alpha}{2} < \alpha$$

donc :

$$N"\left(f\left(\frac{\alpha}{2\,N(X)}\ X, \frac{\alpha}{2\,N'(Y)}\ Y\right)\right) < 1$$

soit par bilinéarité de $f$ puis propriété de la norme :

$$\frac{\alpha^2}{4\,N(X)\,N'(Y)}\ N"\big(f(X)\big) < 1$$

d'où :

$$N"\big(f(X,Y)\big) < \frac{4}{\alpha^2}\, N(X)\, N'(Y)$$

Ce qui prouve la propriété en prenant :

$$k = \frac{4}{\alpha^2}$$

<u>Sens réciproque</u> :

Supposons $f$ bilinéaire et vérifiant :

$$\forall\, (X,Y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}' :\; N"\big(f(X,Y)\big) \leq k\, N(X)\, N'(Y)$$

Alors pour tous couples $(X,Y)$ et $(H,K)$ de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}'$ on a par bilinéarité :

$$f(X+H, Y+K) = f(X,Y) + f(X,K) + f(H,Y) + +f(H,K)$$

donc :

$$N"\big(f(X+H,Y+K) - f(X,Y)\big) \leq N"\big(f(X,K)\big) + N"\big(f(H,Y)\big) + N"\big(f(H,K)\big)$$

Soit :

$$N"\big(f(X+H,Y+K) - f(X,Y)\big) \leq k\, N(X)\, N'(K) + k\, N(H)\, N'(Y) + k\, N(H)\, N'(K)$$

Le majorant tendant vers 0 quand $(H,K)$ tend vers $(0,0)$. La continuité en $(X,Y)$ s'en déduit.

## V <u>Continuité de l'inversion d'un automorphisme</u>

Soit $\mathbb{E}_p$ un espace vectoriel de dimension finie $p$. Notons $Aut\big(\mathbb{E}_p\big)$ l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{E}_p$, c'est-à-dire, rappelons le, des applications linéaires bijectives de $\mathbb{E}_p$ dans lui-même.

Rappelons également que $Aut\big(\mathbb{E}_p\big)$ forme un groupe pour la composition.

**$Aut(\mathbb{E}_p)$ est un ouvert de l'espace vectoriel $End(\mathbb{E}_p)$ formé par les endomorphismes de $\mathbb{E}_p$, normé par la norme triple définie précédemment pour les applications linéaires continues**

**L'application :**

$$\boldsymbol{g} : \boldsymbol{Aut}(\mathbb{E}_p) \to \boldsymbol{Aut}(\mathbb{E}_p)$$

$$\boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}^{-1}$$

**est une application continue sur $Aut(\mathbb{E}_p)$**

Preuve :

On prendra sur $\mathbb{E}_p$ une norme quelconque $N$

1) $Aut(\mathbb{E}_p)$ ouvert de $End(\mathbb{E}_p)$

Etape 1 :

Commençons par montrer que $Aut(\mathbb{E}_p)$ est un voisinage de l'application identité $I_p$

Soit $L \in \mathbb{B}\left(I_p, \frac{1}{2}\right)$ alors :

$$|||L - I_p||| < \frac{1}{2}$$

donc pour tout $X \in \mathbb{E}_p$ on a :

$$N(L(X) - X) < \frac{1}{2} N(X)$$

soit :

$$N(X) - N\big(L(X)\big) < \frac{1}{2} N(X)$$

d'où :

$$\frac{1}{2} N(X) < N\big(L(X)\big)$$

Donc :

$$X \neq 0 \Rightarrow L(X) \neq 0$$

Le noyau de $L$ est donc réduit au vecteur nul, donc $L$ est un automorphisme de $\mathbb{E}_p$ d'où :

$$\mathbb{B}\left(I_p, \frac{1}{2}\right) \subset Aut(\mathbb{E}_p)$$

Etape 2 :

Montrons que $Aut(\mathbb{E}_p)$ est un voisinage de chaque application $L_0$

Soit $L \in \mathbb{B}\left(L_0, \frac{1}{2|||L_0{}^{-1}|||}\right)$ alors :

$$L_0{}^{-1}L - I_p = L_0{}^{-1}\,(L - L_0)$$

donc :

$$|||L_0{}^{-1} \circ L - I_p||| \leq |||L_0{}^{-1}|||\ \ |||L - L_0||| < \frac{1}{2}$$

Ainsi $L_0{}^{-1}L \in \mathbb{B}\left(I_p, \frac{1}{2}\right)$ donc est inversible. Il existe donc un automorphisme $M$ tel que :

$$\left(L_0{}^{-1} \circ L\right) M = M\left(L_0{}^{-1} \circ L\right) = I_p$$

Soit :

$$L\left(M \circ L_0{}^{-1}\right) = \left(M \circ L_0{}^{-1}\right) L = I_p$$

Donc $L \in Aut(\mathbb{E}_p)$ d'où :

$$\mathbb{B}\left(L_0, \frac{1}{2|||L_0{}^{-1}|||}\right) \subset Aut(\mathbb{E}_p)$$

Etape 3 : Continuité de $g$ en $I_p$

Soit $> 0$ , notons :

$$\alpha = min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

alors pour $L \in \mathbb{B}(I_p, \alpha)$ on a :

d'une part :

$$|||L - I_p||| < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc :

$$\forall\, X \in \mathbb{E}_p \setminus\{0\} :\ N(L(X) - X) < \frac{\varepsilon}{2}\, N(X)$$

D'autre part , comme vu précédemment :

$$\frac{1}{2} N(X) < N\big(L(X)\big)$$

donc :

$$\forall\, X \in \mathbb{E}_p \setminus\{0\} :\ N(L(X) - X) < \varepsilon\, N\big(L(X)\big)$$

Soit par changement de variable $X = L^{-1}(Y)$

$$\forall\, Y \in \mathbb{E}_p \setminus\{0\} :\ N(Y - L^{-1}(Y)) < \varepsilon\, N(Y)$$

Donc :

$$\left|\!\left|\!\left| L^{-1} - I_p \right|\!\right|\!\right| < \varepsilon$$

D'où :

$$L^{-1} \in \mathbb{B}\big(I_p, \varepsilon\big)$$

Ce qui prouve la continuité de $g$ en $I_p$

<u>Etape 4</u> : Continuité de $g$ en $L_0$ quelconque

Pour $H \in \mathbb{B}\left(L_0, \frac{1}{2\left|\!\left|\!\left| {L_0}^{-1} \right|\!\right|\!\right|}\right)$

$$g(L_0 + H) - g(L_0) = (L_0 + H)^{-1} - {L_0}^{-1}$$

$$= \left(I_p + H \circ {L_0}^{-1}\right)^{-1} \circ {L_0}^{-1} - {L_0}^{-1}$$

La composition des automorphismes de $\mathbb{E}_p$ étant une application bilinéaire de $\mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p$ dans $\mathbb{E}_p$, elle est continue sur $\mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_p$. La fonction $I_p + H \circ {L_0}^{-1}$ est donc une fonction de $H$ qui tend vers $I_p$ quand $H$ tend vers l'application nulle. Par composition, on en déduit que $\left(I_p + H \circ {L_0}^{-1}\right)^{-1}$ tend vers $L_0$ puis que $g(L_0 + H) - g(L_0)$ tend vers l'application nulle.