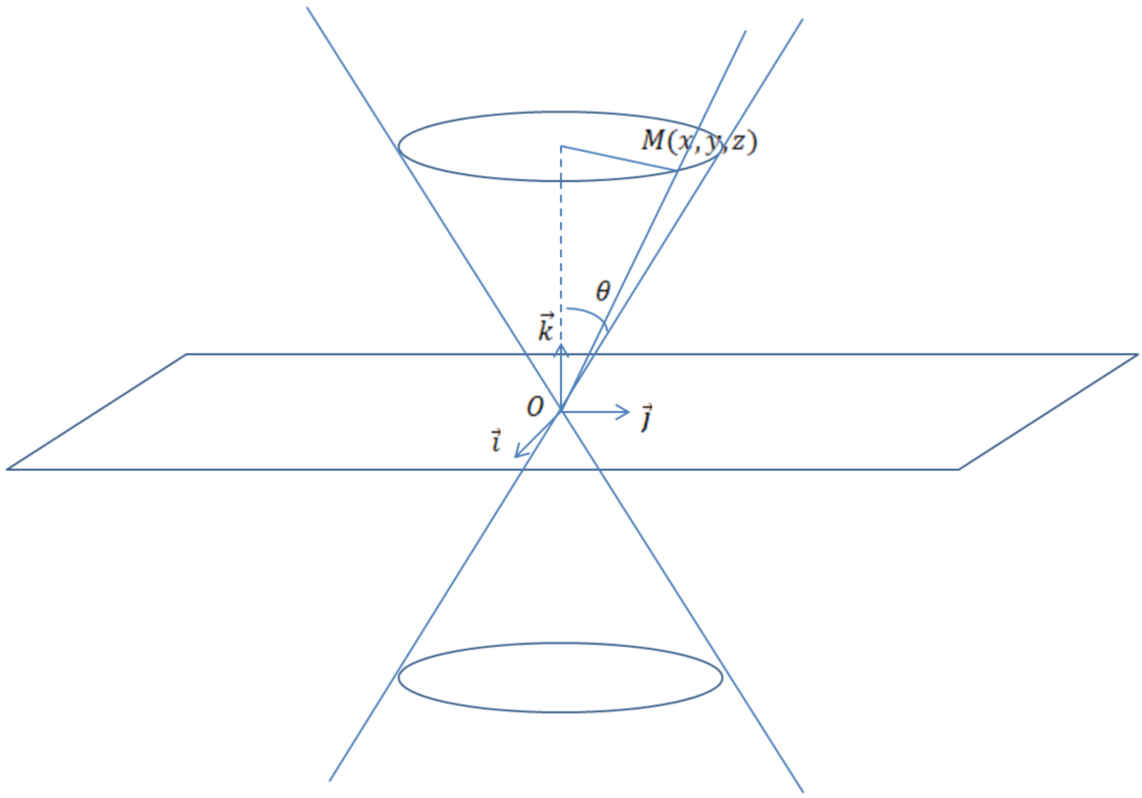
Coniques

1) Définition

Une conique est une courbe plane définie comme étant l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan. Or dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ où O est le sommet du cône et $(O, \vec{k})$ son axe de révolution, l'équation du cône est de la forme :

$$x^2 + y^2 = (k\,z)^2$$

avec $k = tan(\theta), \theta = \text{angle du cône}$



Si on se place dans un repère orthonormé $(\Omega, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ tel que $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ soit un repère du plan de coupe, les coordonnées (X, Y, Z) d'un point M de ce plan dans ce repère vont se déduire de celles (x, y, z) dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ par des relations de la forme :

$$\begin{cases} x \ = m\,X + p\,Y + q\,Z + r \\ y = m'\,X + p'\,Y + q'\,Z + r' \\ z = m"\,X + p"\,Y + q"\,Z + r" \end{cases}$$

En reportant ces relations dans l'équation du cône, sachant que pour les points du plan de coupe on a $Z = 0$, on obtient une équation de la conique de la forme

$$a\,X^2 + 2\,b\,X\,Y + c\,Y^2 + d\,X + e\,Y + f = 0$$

Les coniques sont alors les courbes planes ayant une équation de la forme ci-dessus dans un repère orthonormé.

Effectuons alors un changement de repère par translation dans le plan de coupe en posant :

$$\begin{cases} X = X' - \alpha \\ Y = Y' - \beta \end{cases}$$

L'équation devient

$$a\,X'^2 + 2\,b\,X'Y' + c\,Y'^2 + (d - 2\,a\,\alpha - 2\,b\,\beta)\,X' + (e - 2\,c\,\beta - 2\,b\,\alpha)\,Y' + a\,\alpha^2 + c\,\beta^2 + 2\,b\,\alpha\,\beta - d\,\alpha - d\ \beta + f = 0$$

Deux cas peuvent alors se produire :

<u>1^er cas</u> :

On peut choisir α et β tels que :

$$\begin{cases} d - 2\,a\,\alpha - 2\,b\,\beta = 0 \\ e - -2\,b\,\alpha - 2\,c\,\beta = 0 \end{cases}$$

l'équation se simplifie en une forme :

$$a\,X'^2 + 2\,b\,X'Y' + c\,Y'^2 + f' = 0$$

Soit en notation matricielle :

$$(X', Y') \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} + f = 0$$

La matrice A intervenant dans l'équation étant symétrie réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormale. Il existe donc une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que :

$$A\,P = P\,D$$

$$P\,{}^tP = {}^tP\,P = I_2$$

Soit alors la base orthonormale $\left(\vec{I}_1, \vec{J}_1\right)$ dont les coordonnées dans la base $\left(\vec{I}, \vec{J}\right)$ sont données respectivement par les colonnes de la matrice P. Les coordonnées (X_1, Y_1) d'un point M du plan dans le repère $\left(O', \vec{I}_1, \vec{J}_1\right)$ se déduisent de celles (X', Y') dans $\left(O', \vec{I}, \vec{J}\right)$ par :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$(X', Y') = (X_1, Y_1)\ {}^tP$$

L'équation s'écrit alors :

$$(X_1, Y_1)\ {}^tP\ A\ P\ \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} + f = 0$$

Soit :

$$(X_1, Y_1)\ D\ \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} + f = 0$$

Posant :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

Elle devient :

$$d_1\ {X_1}^2 + d_2\ {Y_1}^2 + f = 0$$

Ce qui, dans les cas non triviaux où d_1 ou d_2 est nul, engendre deux familles selon les signes des coefficients, les hyperboles, lorsque d_1 et d_2 sont de signes contraires, les ellipses, lorsque d_1 et d_2 sont de même signes et de signe contraire à f. Nous allons étudier plus spécialement ces deux familles

2ème cas :

Le système en α et β n'a pas de solution. Son déterminant $(a\ c - b^2)$ est donc nul et on a plusieurs cas possibles

Cas $a \neq 0$:

$$a\ X^2 + 2\ b\ X\ Y + c\ Y^2 + d\ X + e\ Y + f = 0$$

$$\Leftrightarrow a\ \left(X^2 + 2\ \frac{b}{a}\ X\ Y + \frac{c}{a}\ Y^2\right) + d\ X + e\ Y + f = 0$$

$$\Leftrightarrow a\ \left(X + \frac{b}{a}\ Y\right)^2 + d\ X + e\ Y + f = 0$$

Posons :

$$r = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

alors

$$\begin{cases} 1 = \ r\, s \\ \dfrac{b}{a} = \ -r\, t \end{cases}$$

avec :

$$s^2 + t^2 = 1$$

L'équation devient

$$a\, r^2\, (s\, X - t\, Y)^2 + d\, X + e\, Y + f = 0$$

$$\Leftrightarrow (s\, X - t\, Y)^2 = -\frac{d}{a\, r^2}\, X - \frac{e}{a\, r^2}\, Y - \frac{f}{a\, r^2} = 0$$

Cette équation est donc de la forme

$$(s\, X - t\, Y)^2 = u\, X + v\, Y + w$$

Transformons là légèrement de façon à pouvoir faire un changement de repère orthonormé :

$$(s\, X - t\, Y + m)^2 = (u + 2\, s\, m)\, X + (v - 2\, t\, m)\, Y + w + m^2$$

Et choisissons m tel que les deux colonnes suivantes soit colinéaires :

$$\begin{pmatrix} u + 2\, s\, m \\ v - 2\, t\, m \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$$

La condition est que le déterminant soit nul soit :

$$s\, (u + 2\, s\, m) - t\, (v - 2\, t\, m) = 0$$

$$\Leftrightarrow s\ \ u - t\, v + 2\, (s^2 + t^2)\, m = 1$$

$$\Leftrightarrow\ m = \frac{t\, v - s\, u}{2}$$

On a alors ou bien

$$\begin{pmatrix} u + 2\, s\, m \\ v - 2\, t\, m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et l'ensemble est formé de deux droites parallèles ou bien il existe un réel non nul k tel que :

$$\begin{pmatrix} u + 2\, s\, m \\ v - 2\, t\, m \end{pmatrix} = k\ \ \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$$

et l'équation devient :

$$(s\,X - t\,Y + m)^2 = k\,t\,X + k\,s\,Y + w + m^2$$

$$\Leftrightarrow\ (s\,X - t\,Y + m)^2 = k\left(t\,X +\ s\,Y + \frac{w + m^2}{k}\right)$$

On peut alors définir le changement de repère orthonormé suivant :

$$\begin{cases} X_1 = s\,X - t\,Y + m \\ Y_1 = t\,X +\ s\,Y + \dfrac{w + m^2}{k} \end{cases}$$

Dans ce repère, l'équation devient :

$$Y_1 = \frac{1}{k}\,{X_1}^2$$

ce qui est l'équation d'une parabole

<u>Cas $a = 0$</u> auquel cas b =0 :

$$a\,X^2 + 2\,b\,X\,Y + c\,Y^2 + d\,X + e\,Y + f = 0$$

$$\Leftrightarrow c\,Y^2 + d\,X + e\,Y + f = 0$$

Là encore, il faut distinguer deux cas :

$c = 0$ et l'ensemble est soit vide, soit réduit à un point, soit une droite

$c \neq 0$ et l'ensemble a une équation de la forme :

$$c\,\left(Y + \frac{e}{2\,c}\right)^2 + d\,X + f - \frac{e^2}{4\,c} = 0$$

soit dans le cas non trivial $d \neq 0$:

$$X + \frac{f}{d} - \frac{e^2}{4\,c\,d} = -\frac{c}{d}\,\left(Y + \frac{e}{2\,c}\right)^2$$

On pose alors :

$$\begin{cases} X_1 = Y + \dfrac{e}{2\,c} \\ Y_1 = X + \dfrac{f}{d} - \dfrac{e^2}{4\,c\,d} \end{cases}$$

Définissant un changement de repère orthonormé dans lequel l'équation est :

$$Y_1 = -\frac{c}{d}\,{X_1}^2$$

L'ensemble est alors une parabole

2) Etude des hyperboles

Il ressort de l'étude précédente qu'une hyperbole est une courbe $\mathcal{C}$ ayant dans un repère orthonormé une équation de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a, b étant deux réels strictement positifs quelconques

Notons alors que l'on a :

$$M(x, y) \in \mathcal{C} \Rightarrow M(-x, y) \in \mathcal{C}, M(-x, -y) \in \mathcal{C}$$

$\mathcal{C}$ est donc symétrique par rapport à l'axe (O, y) et par rapport à O donc par rapport à l'axe (O, x). Il suffit donc de l'étudier pour $(x, y) \in [0; +\infty[^2$. Sur c e domaine on a alors :

$$M(x, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow y^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Il suffit donc d'étudier sur $[a; +\infty[$la fonction :

$$f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

f est strictement croissante par composée et dérivable sur $]a; +\infty[$ et :

$$f'(x) = \frac{b}{a} \frac{2\,x}{2\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b\,x}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$$

On a également en 0 :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{b}{a} \frac{\sqrt{(a+h)^2 - a^2}}{h} = \frac{b}{a} \frac{\sqrt{2\,a\,h + h^2}}{h} \sim \frac{b}{a} \frac{\sqrt{2\,a\,h}}{h} \sim \frac{b}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h}}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{b}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0 mais présente une demi-tangente verticale.

Etudions les asymptotes. On a en $+\infty$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{b}{a}\,\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} \sim \frac{b}{a}\,\frac{\sqrt{x^2}}{x} \sim \frac{b}{a}$$

et :

$$f(x) - \frac{b}{a}\,x = \frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right)$$

$$= \frac{b}{a}\,\frac{(x^2 - a^2) - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{b}{a}\,\frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \sim \frac{-a\,b}{2\,x}$$

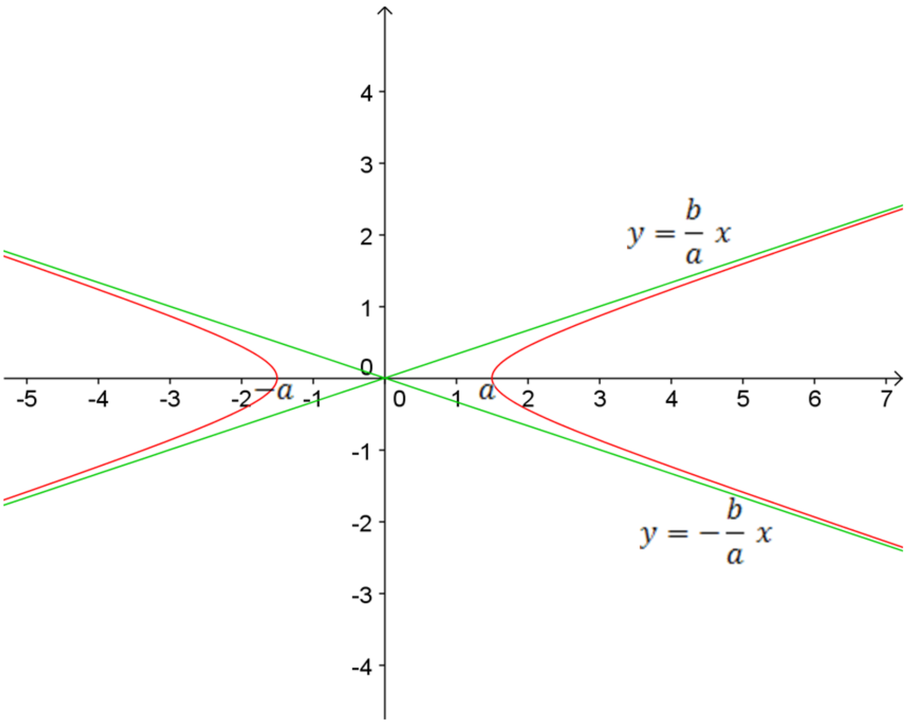
Donc :

$$\lim_{h \to +\infty} f(x) - \frac{b}{a}\,x = 0$$

La courbe admet donc pour asymptote oblique la droite d'équation :

$$y = \frac{b}{a}\,x$$

L'allure de la courbe est donc la suivante :



On obtient notamment une hyperbole en coupant un cône par un plan parallèle à son axe de révolution. Reprenant l'équation du cône donnée initialement, et considérant un plan de coupe d' équation $x = c$ on se place en effet dans le repère $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ avec :

$$\Omega(c, 0,0), \qquad \vec{I} = \vec{k}, \qquad \vec{J} = \vec{\jmath}$$

Et l'équation de la courbe intersection est dans ce repère :

$$c^2 + Y^2 = (k\, X)^2$$

Soit :

$$\frac{X^2}{\left(\frac{c}{k}\right)^2} - \frac{Y^2}{c^2} = 1$$

Les asymptotes sont les droites d'équation $Y = k\, X$ et $Y = -k\, X$

1) Etude des ellipses

Il ressort de l'étude précédente qu'une ellipse est une courbe $\mathcal{C}$ ayant dans un repère orthonormé une équation de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a, b étant deux réels strictement positifs quelconques

Notons alors que l'on a :

$$M(x, y) \in \mathcal{C} \Rightarrow M(-x, y) \in \mathcal{C}, M(-x, -y) \in \mathcal{C}$$

$\mathcal{C}$ est donc symétrique par rapport à l'axe (O, y) et par rapport à O donc par rapport à l'axe (O, x). Il suffit donc de l'étudier pour $(x, y) \in [0; +\infty[^2$. Sur c e domaine on a alors :

$$M(x, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Il suffit donc d'étudier sur $[0; a]$la fonction :

$$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

f est strictement décroissante par composée et dérivable sur $[0; a[$ et :

$$f'(x) = \frac{b}{a}\frac{-2\,x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-\,b\,x}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

On a également en 0 :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{b}{a}\frac{\sqrt{a^2 - (a+h)^2}}{h} = \frac{b}{a}\frac{\sqrt{-2\,a\,h - h^2}}{h} \sim \frac{b}{a}\frac{\sqrt{-2\,a\,h}}{h} \sim \frac{-b}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-h}}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{-b}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-h}} = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0 mais présente une demi-tangente verticale.

L'allure de la courbe est donc la suivante :