Les condensateurs

Les condensateurs jouent un grand rôle en électricité et en électronique. La bouteille de Leyde, présentée dans un fichier précédent, fut un des premiers condensateurs dans l'histoire. Le condensateur plan est alors un type de condensateur intéressant du point de vue théorique, car ses caractéristiques s'évaluent facilement. Aussi allons-nous l'étudier en premier. Il fera apparaître la relation importante liant charge d'une armature et tension, ainsi qu'une constante qui, associée à une autre, appelée perméabilité magnétique du vide, jouera un rôle très important dans la découverte de la nature électromagnétique de la lumière via les équations de Maxwell, la permittivité électrique du vide.

Condensateur plan

Un condensateur plan est un dispositif formé par deux surfaces planes mises en regard et espacées d'une distance très faible devant leur dimension caractéristique (diamètre pour une surface en forme de disque), l'espace entre ces surfaces pouvant être de l'air ou bien comblé par un isolant.

Les surfaces en regard sont appelées **armatures**.

Nous nous intéresserons dans un premier temps au cas de surfaces en forme de disque séparées par une couche d'air, assimilé au vide, qui ne sera valable que pour des charges ne dépassant pas certaines limites, auquel cas, l'air devenant ionisé n'aurait plus les mêmes caractéristiques que le vide, entraînant une décharge dans le condensateur appelée claquage.

Soit donc deux disques de même aire S, disposés parallèlement à une distance L avec de l'air entre les deux.

Exemple de dispositif expérimental

(Note : le deuxième disque peut coulisser afin d'être rapproché du premier afin d'obtenir un faible écartement entre armatures)

Nous pouvons alors charger une armature avec un type d'électricité (+ par exemple) à l'aide d'une machine électrostatique, tout en mettant notre main en contact avec l'autre armature, pour que cette dernière se charge de l'électricité antagoniste (- dans notre exemple).

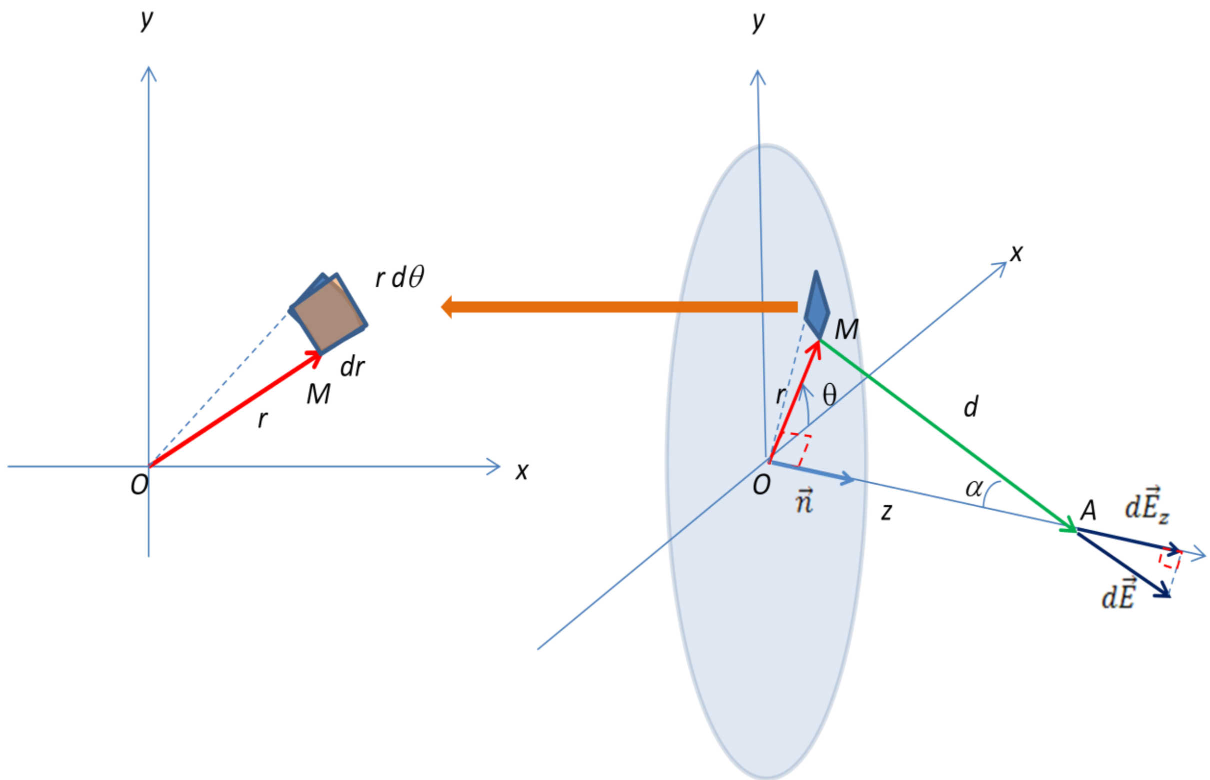
Lorsque nous déconnectons la première armature de la machine électrostatique et que nous ôtons notre main de la seconde, nous devrions constater qu'il y a la même quantité d'électricité sur chaque armature mais avec un signe différent (on peut, pour s'en assurer, mettre en contact les deux disques à l'aide d'un éclateur tenu par un manche isolant, puis vérifier à l'aide d'un électroscope à feuilles d'or par exemple, qu'il n'y a plus de charges résiduelles).

Or, les électricités de même signe se repoussant, il est légitime de penser que la charge électrique va se répartir sur toute la surface interne du disque et en première approximation, on peut penser que cette répartition sera uniforme. On introduit alors la **densité surfacique de charge**, *Q* étant la charge totale de l'armature positive :

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

Evaluons alors le champ créé par les charges de l'armature positive, en un point situé sur l'axe de symétrie de cette armature :

Il est alors judicieux d'utiliser les coordonnées polaires pour définir les éléments de surface contributifs au champ.



Notons $d\vec{E}$ le champ électrique créé en un point A de l'axe, par un élément de surface considéré en un point M de l'armature positive et d'aire $r\ d\theta\ dr$, et considérons un repère orthonormé $(O\ ;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath}\ ;\vec{n})$ où $(O\ ;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath})$ est un repère du plan de l'armature positive d'origine le centre de l'armature et $\vec{n}$ est dirigé de l'armature positive vers l'armature négative.

Nous pouvons par avance savoir que le champ résultant sera porté par le vecteur $\vec{n}$. Seule intervient donc la projection de $d\vec{E}$ sur $(O;\vec{n})$ qui est, en notant $d = MA, r = OM$:

$$d\vec{E}_z = k\ \frac{\sigma\ r\ d\theta\ dr}{d^2} \cos(\alpha)\, \vec{n}$$

Avec :

$$\boxed{\begin{gathered}\cos(\alpha) = \frac{z}{d} \\ d = \sqrt{r^2 + z^2} = (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}\end{gathered}}$$

On en déduit :

$$\vec{E} = \iint_S d\vec{E}_z = k\,\sigma \iint_S \frac{z\,r\,d\theta\,dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\ \vec{n}$$

Une première intégrale en θ donne :

$$\vec{E} = k\,\sigma\,z \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{R} r\,(r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\,dr\ \ \vec{n}$$

$$= k\,\sigma\,z\ \times 2\,\pi\ \left[-\,(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^R\ \vec{n}$$

$$= k\,\sigma\,z\ \times 2\,\pi\ \left((z^2)^{-\frac{1}{2}} - \ (R^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\right)\ \vec{n}$$

$$= k\,\sigma\,z\ \times 2\,\pi\ \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)\ \vec{n}$$

Soit finalement :

$$\boxed{\vec{E} = \ 2\,\pi\,k\,\sigma\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)\ \vec{n} = 2\,\pi\,k\,\sigma\left(1 - \frac{\frac{z}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2}}\right)\ \vec{n}}$$

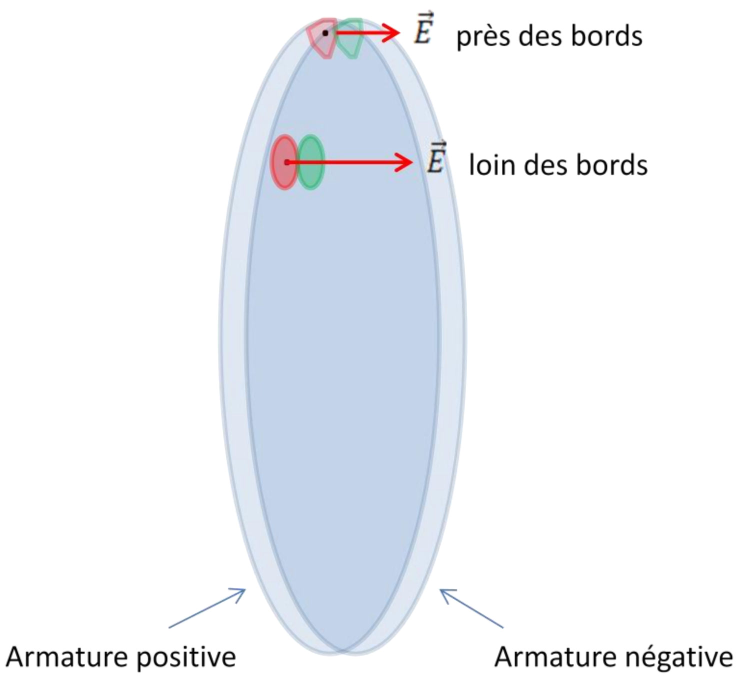
Considérons alors un cas particulier très important du point de vue pratique qui est celui où le quotient z/R est très petit devant 1. Le champ électrique devient alors :

$$\vec{E} = 2\,\pi\,k\,\sigma\;\vec{n}$$

Le champ créé par la plaque négative conduit, par un calcul analogue, au même résultat, de telle sorte que le champ résultant créé par la distribution de charges sur les deux plaques est, en un point situé entre les deux armatures et sur leur axe de symétrie, double, à savoir :

$$\boxed{\vec{E} = 4\,\pi\,k\,\sigma\;\vec{n}}$$

Or, le champ électrique étant inversement proportionnel au carré de la distance, il décroît rapidement quand on s'éloigne de la charge qui le produit. Il est donc légitime de penser, pour un point M situé entre les deux armatures mais pas trop près de leurs bords, que seules les régions voisines en regard et en forme de disque de rayon r, apportent une contribution notable au champ en ce point.



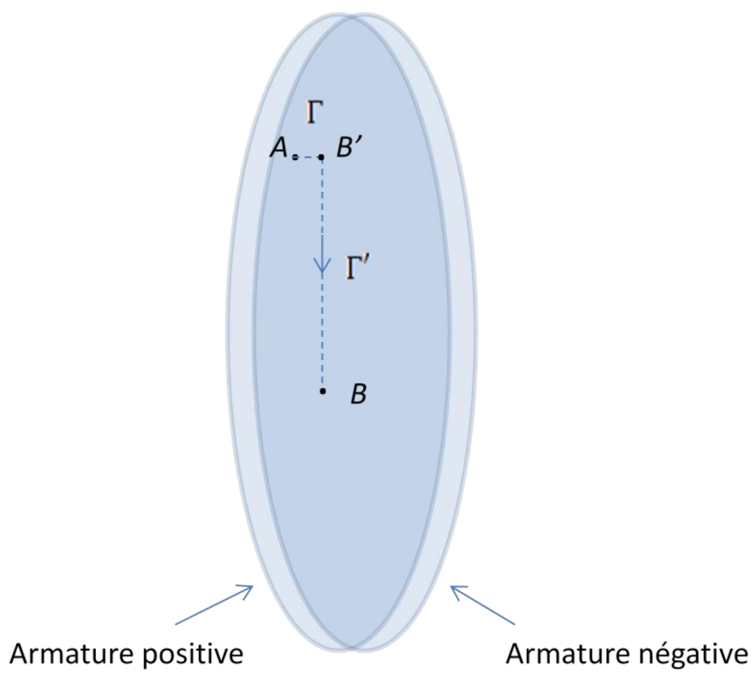
Il est donc légitime de considérer le champ comme constant dans l'espace situé entre les armatures, à condition de ne pas être trop près du bord.

Voyons alors les conséquences en termes de tension.

Considérons un point A infiniment près de la surface interne de l'armature positive mais pas trop près de son bord, et un point B infiniment près de la surface interne de l'armature négative mais pas trop près de son bord également.

La tension entre les points A et B peut être évaluée, en faisant intervenir le point B' situé infiniment près de l'armature négative mais sur la même ligne de champ que A. Nous pouvons écrire la relation, dite relation d'additivité des tensions, qui n'est qu'une propriété de l'intégrale :

$$U_{AB} = U_{AB'} + U_{B'B}$$



Or, le champ électrique étant orthogonal à la tangente en tout point du chemin $\Gamma' = [\mathrm{B} ; \mathrm{B}']$, on a :

$$U_{B'B} = \int_{B' \to B \ (\Gamma')} \vec{E} \cdot d\overrightarrow{OM} = 0$$

Donc :

$$U_{AB} = U_{AB'} = \int_{A \to B' \ (\Gamma)} \vec{E} \cdot d\overrightarrow{OM} = \vec{E} \cdot \overrightarrow{AB'}$$

Soit finalement :

$$\boxed{U_{AB} = \left\|\vec{E}\right\| \times L}$$

Nous retiendrons les propriétés :

Le champ électrique en un point situé entre les deux armatures d'un condensateur plan et pas trop près des bords est constant et orthogonal au plan des armatures.

La tension entre un point de l'armature positive et un point de l'armature négative, ces points n'étant pas trop près des bords des armatures, est indépendante du choix de ces points. Nous l'appellerons simplement tension du condensateur.

Essayons maintenant d'exprimer cette tension à partir de la charge Q de l'armature positive :

$$U_{AB} = 4\,\pi\,k\,\sigma\,L = 4\,\pi\,k\,\frac{Q}{S}L$$

Et reprenons cette formule en isolant la charge Q :

$$\boxed{Q = \frac{1}{4\,\pi\,k}\,\frac{S}{L}\,U_{AB}}$$

Cette formule montre que, pour une tension donnée, et nous verrons plus tard que celle-ci sera généralement imposée par une pile, la charge apparaissant sur l'armature positive une fois le condensateur chargé, est proportionnelle à la surface de l'armature et inversement proportionnelle à la distance entre armatures.

On appelle alors **capacité du condensateur**, la charge qu'il peut emmagasiner pour une tension unité. Cette capacité est donc :

$$\boxed{C = \frac{1}{4\,\pi\,k}\,\frac{S}{L} \quad (unité = Fahrad, symbole = F)}$$

On définit également la **permittivité électrique du vide** la quantité :

$$\boxed{\varepsilon_0 = \frac{1}{4\,\pi\,k} \;\; de\ valeur = \frac{1}{36\,\pi\ \times 10^9}}$$

La formule de la capacité devient alors :

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0\,S}{L}}$$

Dans le cas où l'espace entre les armatures est occupé par un isolant autre que le vide (air, mica), cette formule s'écrit :

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon\,S}{L}}$$

ε, qui est alors strictement supérieur à ε_0, est alors la permittivité électrique de l'isolant. Nous reviendrons sur ce cas.

Mesure de la tension d'un condensateur plan chargé

Une question essentielle se pose. L'étude précédente nous a montré une relation entre la charge du condensateur et sa tension. En anticipant ce qui va venir par la suite, à savoir l'électrocinétique, c'est-à-dire la production de courants électriques au moyen de générateurs de courant continu, pouvant débiter des charges à partir de transformations chimiques ou de phénomènes magnétiques, le concept de tension est le concept qui va permettre de caractériser la force des piles par exemple.

La mesure de la tension d'un condensateur, connecté à une pile avec laquelle il a atteint son équilibre (sa charge, mesurable qualitativement par mise en contact d'une armature avec un électromètre par exemple, ne varie plus) donnera une caractéristique de la pile appelée **tension à vide** ou **force électromotrice**.

Il est donc du plus grand intérêt de pouvoir évaluer cette tension en mesurant une grandeur sur le condensateur.

Voyons ce qu'il est possible de faire en exploitant la première relation :

$$U_{AB} = \|\vec{E}\| \times L$$

On peut imaginer un dispositif visant à mesurer l'intensité du champ électrique, en intercalant une petite sphère de charge connue q, par exemple positive, entre les deux armatures, et mesurer ensuite la force s'exerçant sur cette sphère, retenue en rotation au bout d'une tige par un ressort de rappel.

Le problème est que les armatures d'un condensateur sont très proches et parfois un isolant s'y intercale.

Il faut donc trouver une autre solution.

Une mesure qui peut être a priori effectuée facilement est celle de la force d'interaction attractive entre les deux armatures. Il suffit d'en fixer une par le biais d'un isolant et de relier la seconde à un dynamomètre, par un isolant également.

Quel rapport y a-t-il maintenant entre cette force et la tension du condensateur ? C'est ce que nous allons voir.

Nous avons vu que le champ électrique créé par l'armature positive en un point de l'armature négative, pas trop près du bord, est :

$$\boxed{\vec{E} = 2\,\pi\,k\,\sigma\,\vec{n} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\vec{n}}$$

Un élément de surface dS de l'armature négative, portant la charge négative $-\sigma\,dS$, est donc soumis à une force :

$$d\vec{F} = \frac{-\,\sigma^2\,dS}{2\,\varepsilon_0}\,\vec{n} = \frac{-\,Q^2\,dS}{2\,\varepsilon_0\,S^2}\,\vec{n}$$

L'armature négative subit donc la force électrique totale :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{-\,Q^2}{2\,\varepsilon_0\,S}\,\vec{n}}$$

Or :

$$Q = \frac{\varepsilon_0\,S}{L}\,U_{AB}$$

Donc :

$$\vec{F} = \frac{-\,\varepsilon_0\,S}{2\,\,L^2}\,{U_{AB}}^2\,\vec{n}$$

Finalement :

$$\boxed{\|\vec{F}\| = \frac{\varepsilon_0 \, S}{2 \, L^2} {U_{AB}}^2}$$

Voilà, nous l'avons notre formule. Il est à noter que l'intensité de la force est proportionnelle au carré de la tension.

La tension d'un condensateur plan dont l'isolant est le vide (ou l'air) pourra donc être mesurée a priori par :

$$\boxed{U_{AB} = \sqrt{\frac{2 \, L^2 \, \|\vec{F}\|}{\varepsilon_0 \, S}} \quad (unité = Volt)}$$

Voyons alors d'un point de vue pratique la faisabilité d'un tel dispositif, pour une mesure de l'unité de tension. Prenons, pour fixer les idées, des armatures en forme de disque de diamètre D = 10 cm et séparées de 1 mm.

La force s'exerçant entre les armatures pour une tension de 1 Volt est :

$$\|\vec{F}\| = \frac{\varepsilon_0 \, \pi \, D^2}{8 \, L^2}$$

Soit numériquement :

$$\|\vec{F}\| = \frac{\pi \; \times 10^{-2}}{8 \times 36 \, \pi \times 10^{9} \; \times 10^{-6}} \approx 3{,}4 \times 10^{-8} \, N$$

Cela n'est beaucoup, il va donc être difficile de mesurer une telle force et donc de mesurer une tension de 1 Volt avec ce genre de dispositif

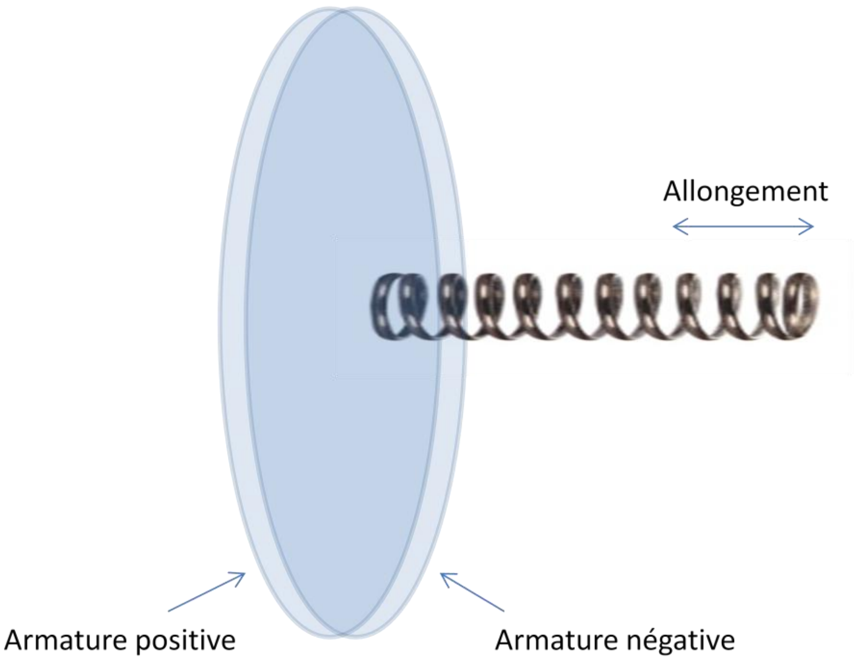
En revanche, si nous avions une tension de 1000 V, le résultat précédent serait multiplié par 1 000 000, ce qui donnerait :

$$\|\vec{F}\| \approx 3{,}4 \times 10^{-2}\ N$$

El là, ça deviendrait mesurable, il suffirait pour cela de fixer une des armatures horizontalement et de pendre une masse d'environ 3,4 mg sur l'autre, pour empêcher les armatures de se coller et se décharger.

Les Voltmètres qui ont été développés par la suite reposent sur des phénomènes magnétiques (galvanomètre à cadre mobile) permettant de détecter de faibles tensions.

Mais l'image d'un dispositif imaginaire utilisant un dynamomètre pour maintenir les armatures en place une fois chargées, nous semble bonne, car c'est bien une tension que ce dernier devrait exercer pour contrecarrer la force d'attraction entre armatures.



Différents types de condensateurs

L’intérêt des condensateurs est d’accumuler deux charges électriques antagonistes, ce qui constitue un réservoir d’énergie et comme nous le verrons plus tard, permet de créer de nombreux dispositifs utilisés en électronique, tels que des filtres passifs.

Il est donc important de pouvoir disposer de condensateurs ayant toutes sortes de capacités et aussi de pouvoir faire varier cette capacité, comme dans un tuner par exemple, servant à filtrer la porteuse d’une émission de radio par exemple.

Le condensateur plan n’est donc pas toujours adapté.

Voici quelques exemples de technologie.

- <u>Condensateurs à armatures et isolant enroulés</u>

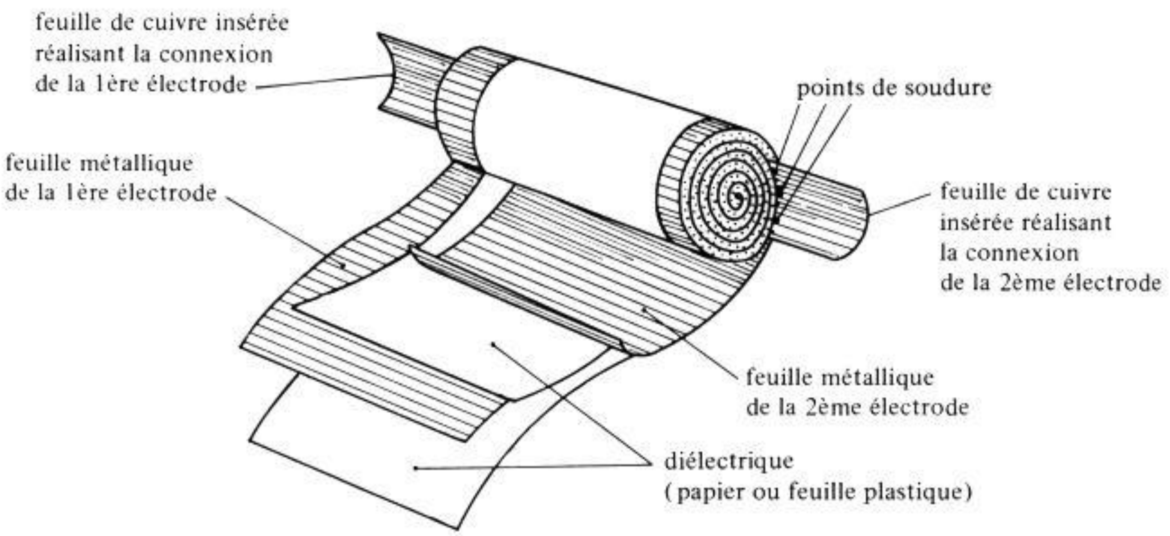


Fig. 11.16

L’avantage d’enrouler les armatures est de pouvoir augmenter la capacité qui dépend, d’une manière approximative, proportionnellement des surfaces en regard.

- <u>Condensateurs à capacité variable</u> :

Le principe est de faire varier la partie chargée des armatures en regard en faisant pivoter l'une d'elle, ou plus généralement, tout un ensemble d'armatures de même charge, autour d'un axe.