Analyse combinatoire-dénombrement

Le but de ce fichier est de résoudre des problèmes du genre : De combien de façons peut on ranger sept voitures sur dix places de parking ou bien combien y a-t-il de combinaisons au loto ou bien combien de quartés peut on faire avec sept chevaux et bien d'autres encore.

L'analyse combinatoire est au cœur d'une branche des mathématiques ayant pris un essor considérable au cours de ce siècle, les probabilités, surtout depuis qu'une certaine physique quantique a mis à mal la vision déterministe qui prévalait aux siècles passés et bouleversé notre vision du monde.

Dans toute la suite, $\mathbb{E}_n = [\![1; n]\!]$ désignera l'ensemble des entiers naturels allant de 1 à n, n étant un entier naturel non nul.

I Permutations

Une permutation de $\mathbb{E}_n$ est une suite finie formée avec tous les éléments de $\mathbb{E}_n$. C'est donc, d'un point de vue mathématique, une bijection de $\mathbb{E}_n$ dans lui-même.

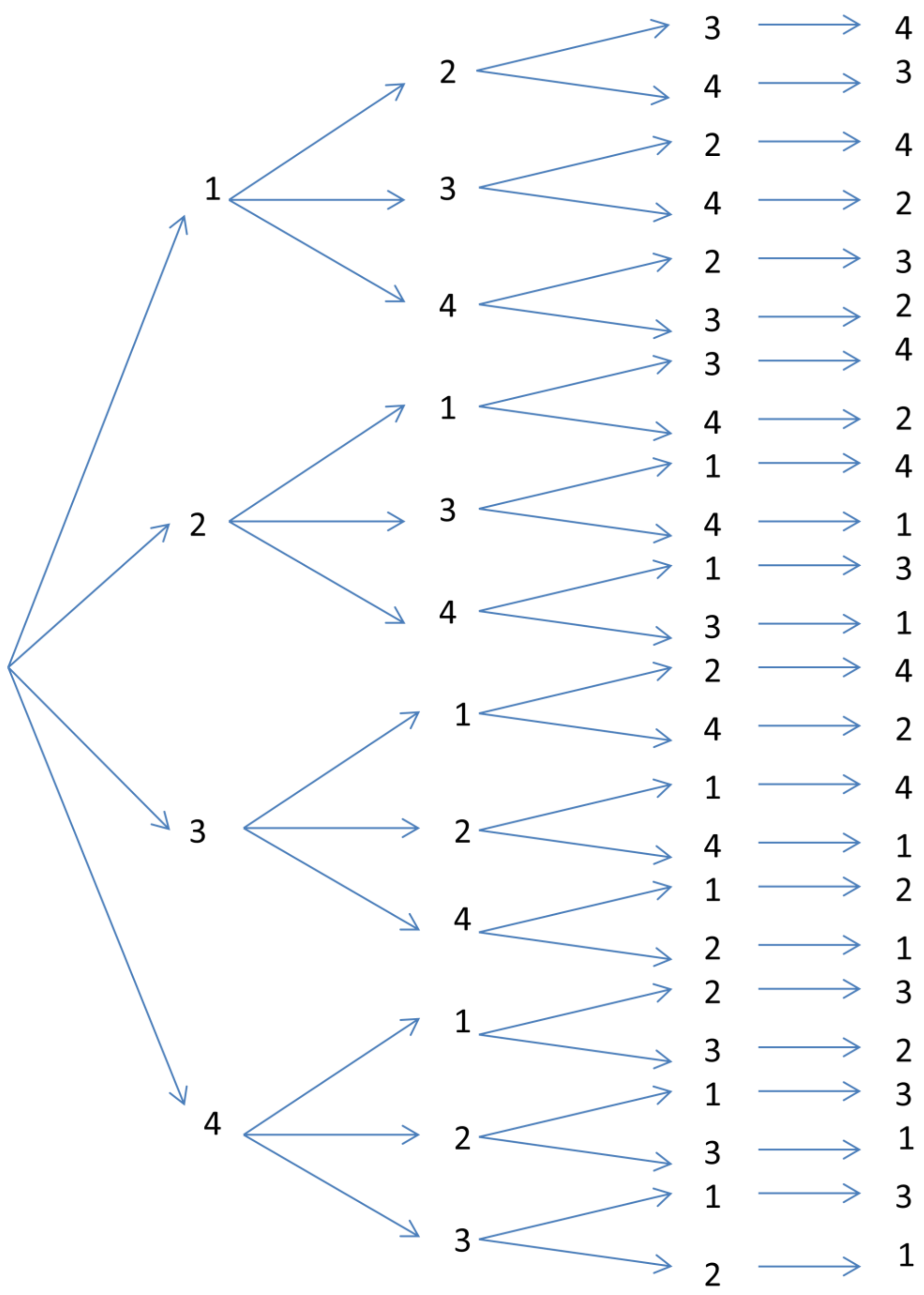
Exemple :

$(3,1,2,4)$ est une permutation de $\mathbb{E}_4$

$(1,3,5,4,2)$ est une permutation de $\mathbb{E}_5$

Les lignes et les colonnes d'un Sudoku classique sont des permutations de $\mathbb{E}_9$

Voyons alors comment dénombrer toutes les permutations de $\mathbb{E}_n$ en commençant par l'exemple de $\mathbb{E}_4$. Disposons, de façon arborescente, les différentes façons de créer une permutation, choix du premier terme, du second, etc…



Il y a alors autant de permutations de $\mathbb{E}_4$ qu'il y a de chemins. Les 4 choix possibles du premier terme définissent chacun 3 choix possibles pour le second, qui à leur tour définissent deux choix possibles pour le troisième, qui n'offrent plus finalement qu'un seul choix pour le dernier. Le nombre de permutations de $\mathbb{E}_4$ est donc :

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Il est noté $4!$, prononcer factoriel 4.

De façon générale, la même démarche conduit à établir que le nombre de permutations de $\mathbb{E}_n$ est :

$$\boxed{\boldsymbol{n! = n \times (n-1) \times \dots 2 \times 1}}$$

Si on considère l'ensemble vide comme une permutation à zéro éléments de $\mathbb{E}_n$, il est sensé de poser :

$$\boxed{\boldsymbol{0! = 1}}$$

II Arrangements

k et n étant deux entiers naturels non nuls,

un k-arrangement de $\mathbb{E}_n$ est une suite finie formée avec k éléments de $\mathbb{E}_n$. C'est donc, d'un point de vue mathématique, une injection de $\mathbb{E}_k$ dans $\mathbb{E}_n$.

Exemple :

$(3,1,4)$ est un 3-arrangement de $\mathbb{E}_5$

(2) est un 1-arrangement de $\mathbb{E}_5$

Voyons alors comment dénombrer toutes les k-arrangements *de* $\mathbb{E}_n$ en commençant par un exemple :

En s'inspirant de la technique arborescente précédente, nous pouvons facilement dénombrer les 3-arrangements de $\mathbb{E}_{10}$, sachant qu'il y a 10 choix possibles pour le premier élément, 9 choix pour le second et 8 pour le troisième, donc :

$$10 \times 9 \times 8 = 720$$

Ce nombre est noté A_{10}^3

De façon générale, le nombre de k-arrangements *de* $\mathbb{E}_n$ est, puisqu'il y a k choix à effectuer :

$$\boxed{\boldsymbol{A_n^k = n \times (n-1) \times (n-2) \dots \times (n-(k-1))}}$$

On peut l'écrire de façon plus compacte en poursuivant les multiplications d'entiers décroissants jusqu'à parvenir au facteur 1 :

$$A_n^k = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times (n-(k-1)) \times (n-k) \times (n-(k+1)) \times \ldots \times 2 \times 1}{(n-k) \times (n-(k+1)) \times \ldots \times 2 \times 1}$$

Ainsi :

$$\boxed{\boldsymbol{A_n^k = \frac{n\,!}{(n-k)!}}}$$

On convient également, afin d'étendre la formule, de :

$$\boxed{\boldsymbol{A_n^0 = 1}}$$

Ce qui peut s'interpréter ainsi : Il n'y a qu'une seule liste à zéro élément pouvant être faite à partir des éléments de $\mathbb{E}_n$, c'est la liste vide.

On convient également de :

$$\boxed{\boldsymbol{A_0^0 = 1}}$$

A noter que :

$$\boxed{\boldsymbol{A_n^n = n\,!}}$$

<u>Exemple</u> <u>d'application</u> :

De combien de façons peut on ranger 7 voitures sur 10 places de parking ?

solution :

Chaque voiture se rangeant forcément dans un parking mais pas l'inverse, une façon correspond à une injection de l'ensemble des voitures dans l'ensemble des places de parking. Le nombre de façons est donc :

$$A_{10}^7 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 604\,800$$

III Combinaisons

k et n étant deux entiers naturels non nuls,

une k-combinaison de $\mathbb{E}_n$ est un sous ensemble formé avec k éléments de $\mathbb{E}_n$. C'est donc, d'un point de vue mathématique, une partie à k éléments de $\mathbb{E}_n$.

Exemple :

$\{2,4,5\}$ est une 3-combinaison de $\mathbb{E}_5$

$\{2\}$ est une 1-combinaison de $\mathbb{E}_5$

$\{\}$ est une 0-combinaison de $\mathbb{E}_5$

Voyons alors comment dénombrer toutes les k-arrangements *de* $\mathbb{E}_n$ en commençant par un exemple :

En s'inspirant de la technique arborescente précédente, nous pouvons facilement dénombrer les 3-combinaisons de $\mathbb{E}_{10}$. Notons C_{10}^3 le nombre de 3-combinaisons de $\mathbb{E}_{10}$. Chacune des C_{10}^3 combinaisons permet de créer 3! permutations des trois éléments qu'elles contient. Nous avons ainsi :

$$C_{10}^3 \times 3! = A_{10}^3$$

Ainsi :

$$C_{10}^3 = \frac{A_{10}^3}{3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times 3 \times 8 = 120$$

De manière générale :

$$\boxed{\boldsymbol{C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}}$$

Afin d'étendre la définition, on pose également :

$$\boxed{\boldsymbol{C_n^0 = 1}}$$

Ce qui s'interprète comme : Le seul sous-ensemble à zéro élément pouvant être formé à partir des éléments de $\mathbb{E}_n$ est l'ensemble vide.

On pose également :

$$\boldsymbol{C_0^0 = 1}$$

Notation moderne :

La notation la plus couramment rencontrée est la suivante :

$$\boldsymbol{\binom{n}{k} = C_n^k}$$

Nous l'adopterons donc de ce fait.

IV Propriétés des combinaisons

Propriété 1 :

A tout choix d'un sous-ensemble à k éléments de $\mathbb{E}_n$ correspond un sous-ensemble des $(n-k)$ éléments non choisis et vice-versa. Ainsi, y compris lorsque k est nul :

$$\boldsymbol{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$$

Retrouvons la preuve de cette propriété en appliquant la formule avec les factoriels :

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,\big(n-(n-k)\big)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

Exemple d'application :

$$\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2 \times 1} = 190$$

Propriété 2 :

Le fichier sur les combinaisons et le triangle de Pascal montre que l'on a pour tous entiers naturels non nuls k et n :

$$\boldsymbol{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}}$$

Redémontrons cette propriété à l'aide des formules factorielles :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,\big(n-(k-1)\big)!}$$

$$= \frac{n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k)!\,(n-k+1)} + \frac{n!\,k}{k\,(k-1)!\,\big(n-(k-1)\big)!}$$

$$= \frac{n!\,(n-k+1) + n!\,k}{k!\,(n+1-k)!}$$

$$= \frac{n!\,(n-k+1+k)}{k!\,(n+1-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,\big((n+1)-k\big)!}$$

$$= \binom{n+1}{k}$$

On peut aisément déduire d'autres formules :

Pour $2 \leq k \leq n+2$

$$\boxed{\binom{\boldsymbol{n+2}}{\boldsymbol{k}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} + \mathbf{2}\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k-1}} + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k-2}}}$$

Pour $3 \leq k \leq n+3$

$$\boxed{\binom{\boldsymbol{n+3}}{\boldsymbol{k}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} + \mathbf{3}\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k-1}} + \mathbf{3}\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k-2}} + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k-3}}}$$

Puis par récurrence sur m entier naturel, pour $m \leq k \leq n+m$

$$\boxed{\binom{\boldsymbol{n+m}}{\boldsymbol{k}} = \sum_{\boldsymbol{q=0}}^{\boldsymbol{m}} \binom{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{q}} \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k-q}}}$$

<u>Exemple d'application</u> : le poker

<u>Questions</u> :

Dans un jeu de 32 cartes, on prélève 5 cartes, ce que l'on appellera une main.

Combien y a-t-il de mains possibles ?

Parmi ces mains, quelle proportion y a-t-il de mains où toutes les cartes sont de la même couleur (ce qu'on appelle une couleur au poker) ?

<u>Solution</u> :

Il y a autant de mains que de 5-combinaisons de $\mathbb{E}_{32}$ soit :

$$\binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 4 \times 31 \times 2 \times 29 \times 28 = 201\,376$$

Les mains dont toutes les cartes sont de couleur cœur par exemple, sont au nombre de :

$$\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 = 56$$

Les mains dont toutes les cartes sont de la même couleur sont donc au nombre de :

$$4 \times 8 \times 7$$

Elles représentent la proportion :

$$\frac{4 \times 8 \times 7}{4 \times 31 \times 2 \times 29 \times 28} = \frac{1}{31 \times 29} = \frac{1}{899}$$

Il y a donc une chance sur 899 d'obtenir une couleur en première main.

V Binôme de Newton

Dans toute la suite, a et b désignent deux réels quelconques, n un entier naturel non nul

Considérons les développements successifs des puissances de $a + b$

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1\,a + 1\,b$$

$$(a+b)^2 = 1\,a^2 + 2\,a\,b + 1\,b^2$$

$$(a+b)^3 = 1\,a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + 1\,b^3$$

$$(a+b)^4 = 1\,a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,a\,b^3 + 1\,b^4$$

Nous constatons que les coefficients qui apparaissent sont ceux des lignes du triangle de Pascal donc des combinaisons, ainsi pour la dernière relation par exemple :

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}\,a^4 + \binom{4}{1}\,a^3\,b + \binom{4}{2}\,a^2\,b^2 + \binom{4}{3}\,a\,b^3 + \binom{4}{4}\,b^4$$

Cela suggère une relation générale de la forme :

$$\boxed{\boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\,a^k\,b^{n-k}}}$$

Prouvons cette relation par récurrence sur n en notant $P(n)$ la propriété précédente.

<u>Initialisation</u> :

Les relations précédentes montrent que $P(0), P(1), P(2), P(3), P(4)$ sont vraies

Hérédité :

Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ soit vraie alors :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\,(a+b)^n$$

$$= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

$$= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1}\, b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k\, b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k}$$

$$= \binom{n}{n} a^{n+1}\, b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k\, b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0\, b^{n+1}$$

$$= a^{n+1}\, b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k\, b^{n+1-k} + a^0\, b^{n+1}$$

$$= a^0\, b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k\, b^{n+1-k} + a^{n+1}\, b^0$$

$$= \binom{n+1}{0} a^0\, b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1}\, b^0$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k\, b^{n+1-k}$$

$P(n+1)$ est donc vraie

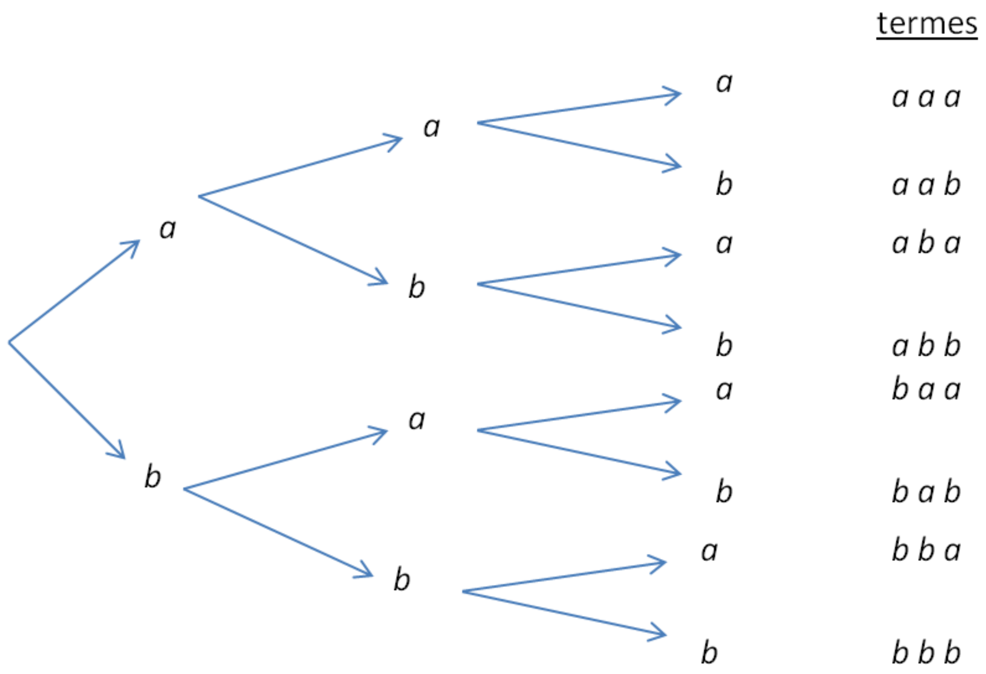
Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n

Remarque :

La formule du binôme peut se déduire intuitivement :

$$(a+b)^n = (a+b)\,(a+b) \ldots (a+b)$$

Le développement conduit à une somme de termes de la forme $a^k\, b^{n-k}$ obtenus à partir d'un développement arborescent (comme dans l'exemple qui suit pour n =3 indiquant le terme choisi dans chaque facteur. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir k facteurs dans lequel a est sélectionné pour le développement, b étant sélectionné dans les $n-k$ facteurs restants.



VI Propriétés déduites du binôme de Newton

Propriété 1 :

En prenant $a=1$ et $b=1$ dans la formule du binôme, on en déduit :

$$\mathbf{2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}$$

Autrement dit, la somme des termes de chaque ligne du triangle de Pascal est une puissance de 2

Propriété 2 :

En prenant $a=-1$ et $b=1$ dans la formule du binôme, on en déduit :

$$\mathbf{0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ (-1)^k}$$

Autrement dit, la somme alternée des termes de chaque ligne du triangle de Pascal est nulle

Propriété supplémentaires

En prenant $a = x$ et $b = 1$ dans la formule du binôme, on en déduit pour tout entier naturel n et réel x :

$$\boldsymbol{(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k}$$

En dérivant cette relation, on en déduit pour tout entier naturel $n \geq 1$

$$\boldsymbol{n\,(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}}$$

En prenant $x = 1$:

$$\boldsymbol{n\, 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}}$$

En dérivant à nouveau l'avant dernière relation, on en déduit pour tout entier naturel $n \geq 2$

$$\boldsymbol{n\,(n+1)(x+1)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k\,(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2}}$$

En prenant $x = 1$:

$$\boldsymbol{n\,(n+1)\, 2^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k\,(k-1) \binom{n}{k}}$$

Cela permet par exemple d'en déduire une formule pour

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

En effet, la formule précédente, valable encore avec les indices 0 et 1 s'écrit :

$$n\,(n+1)2^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k\,(k-1) \binom{n}{k}$$

$$n\,(n+1)2^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} \; - \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$$

$$n\,(n+1)2^{n-2} + \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \;= \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

$$n\,(n+1)2^{n-2} + n\,2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} \;= n\,2^{n-2}\,(n+1+2)$$

Soit finalement :

$$\boxed{\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} \;= n\,(n+3)\,2^{n-2}}}$$

Maintenant en intégrant la relation initiale, on obtient :

$$\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Et en faisant $x = 1$, cela donne :

$$\boxed{\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \;= \frac{2^{n+1}}{n+1}}}$$

On pourrait continuer ainsi en intégrant à nouveau et obtenir d'autres relations

VII Propriété faisant appel aux nombres complexes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons, pour $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m < n$ les m racines m -ièmes complexes de l'unité, à savoir, rappelons-le, les complexes de l'ensemble :

$$\left\{e^{i\frac{2\,r\,\pi}{m}} \;:\; r \in \mathbb{N} \;\; et \;\; 0 \le r \le m-1\right\} = \left\{e^{i\,0}\;;\; e^{i\frac{2\,\pi}{m}}\;;\; e^{i\frac{4\,\pi}{m}}\,;\ldots;\; e^{i\frac{2\,(n-1)\pi}{m}}\right\}$$

En notant :

$$\omega = e^{i\frac{2\,\pi}{m}}$$

On peut les mettre sous la forme de puissances consécutives entières de ω :

$$\omega^0 , \omega^1 , \omega^2 , \dots , \omega^{m-1}$$

Développons alors par la formule du binôme pour $q \in [\![0; m-1]\!]$:

$$(\omega^q + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\omega^q)^k$$

Détaillons pour les différentes valeurs de q afin de faire apparaître une relation intéressante, ce que les notations sigma rendent moins facile (sauf peut-être pour des cracs en maths, mais l'objectif de l'auteur est de satisfaire un public large, en dehors de lui-même) :

$$(\omega^0 + 1)^n = \binom{n}{0} (\omega^0)^0 + \binom{n}{1} (\omega^0)^1 + + \binom{n}{2} (\omega^0)^2 + \dots + \binom{n}{n} (\omega^0)^n$$

$$(\omega^1 + 1)^n = \binom{n}{0} (\omega^1)^0 + \binom{n}{1} (\omega^1)^1 + + \binom{n}{2} (\omega^1)^2 + \dots + \binom{n}{n} (\omega^1)^n$$

$$(\omega^2 + 1)^n = \binom{n}{0} (\omega^2)^0 + \binom{n}{1} (\omega^2)^1 + + \binom{n}{2} (\omega^2)^2 + \dots + \binom{n}{n} (\omega^2)^n$$

$$\vdots$$

$$(\omega^q + 1)^n = \binom{n}{0} (\omega^q)^0 + \binom{n}{1} (\omega^q)^1 + + \binom{n}{2} (\omega^q)^2 + \dots + \binom{n}{n} (\omega^q)^n$$

$$\vdots$$

$$(\omega^{m-1} + 1)^n = \binom{n}{0} (\omega^{m-1})^0 + \binom{n}{1} (\omega^{m-1})^1 + + \binom{n}{2} (\omega^{m-1})^2 + \dots + \binom{n}{n} (\omega^{m-1})^n$$

Alors là, que voyons nous ? En y regardant de près, des choses très intéressantes, pourvu que l'on ait l'idée de permuter les puissances. Ainsi :

$$(\omega^0 + 1)^n = \binom{n}{0} (\omega^0)^0 + \binom{n}{1} (\omega^1)^0 + + \binom{n}{2} (\omega^2)^0 + \dots + \binom{n}{n} (\omega^n)^0$$

$$(\omega^1 + 1)^n = \binom{n}{0} (\omega^0)^1 + \binom{n}{1} (\omega^1)^1 + + \binom{n}{2} (\omega^2)^1 + \dots + \binom{n}{n} (\omega^n)^1$$

$$(\omega^2 + 1)^n = \binom{n}{0} (\omega^0)^2 + \binom{n}{1} (\omega^1)^2 + + \binom{n}{2} (\omega^2)^2 + \dots + \binom{n}{n} (\omega^n)^2$$

$$\vdots$$

$$(\omega^q + 1)^n = \binom{n}{0} (\omega^0)^q + \binom{n}{1} (\omega^1)^q + + \binom{n}{2} (\omega^2)^q + \dots + \binom{n}{n} (\omega^n)^q$$

$$\vdots$$

$$(\omega^{m-1} + 1)^n = \binom{n}{0} (\omega^0)^{m-1} + \binom{n}{1} (\omega^1)^{m-1} + + \binom{n}{2} (\omega^2)^{m-1} + \dots + \binom{n}{n} (\omega^n)^{m-1}$$

Et là, ça devient clair, non ? Si, si, regardez bien, en sommant toutes les lignes nous voyons apparaître, après factorisation, des termes de la forme :

$$\binom{n}{k}\left(\left(\omega^k\right)^0+\left(\omega^k\right)^1+\left(\omega^k\right)^2+\cdots+\left(\omega^k\right)^{m-1}\right)$$

Or, deux cas peuvent se présenter :

1er cas : $\omega^k=1$ donc pour $k=0, m, 2\,m,\;\; 3\,m, \ldots$ soit $k$multiple de m inférieur ou égal à n

Le terme vaut alors :

$$\binom{n}{k}\times m$$

2ème cas : $\omega^k\neq 1$ donc pour k non multiple de m

Le terme vaut alors :

$$\binom{n}{k}\frac{1-\left(\omega^k\right)^m}{1-\omega^k}=\binom{n}{k}\frac{1-(\omega^m)^k}{1-\omega^k}=\binom{n}{k}\frac{1-1^k}{1-\omega^k}=0$$

Ainsi :

$$(\omega^0+1)^n+(\omega^1+1)^n+(\omega^2+1)^n+\cdots+(\omega^{m-1}+1)^n$$

$$=\binom{n}{0}\times m+\binom{n}{m}\times m+\binom{n}{2\,m}\times m+\cdots+\binom{n}{p\,m}\times m$$

Où p est le plus grand entier naturel tel que :

$$p\,m\leq n$$

Soit :

$$p\,m\leq n<(p+1\,)m$$

Donc :

$$p\;\leq\frac{n}{m}<p+1$$

p est donc la partie entière de $\frac{n}{m}$

Ecrit plus joliment avec les sigma, cela donne :

$$\sum_{q=0}^{m-1}(\omega^q+1)^n=m\sum_{j=0}^{p}\binom{n}{j\,m}$$

Mais ne partez pas, ce n'est pas fini. Votre œil perspicace aura tout de suite reconnu :

$$\omega^q + 1 = \left(e^{i\frac{2\pi}{m}}\right)^q + 1 = e^{i\frac{2\pi q}{m}} + 1 = e^{i\frac{\pi q}{m}}\left(e^{-i\frac{\pi q}{m}} + e^{i\frac{\pi q}{m}}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi q}{m}\right)e^{i\frac{\pi q}{m}}$$

Ainsi :

$$(\omega^q + 1)^n = \left(2\cos\left(\frac{\pi q}{m}\right)e^{i\frac{\pi q}{m}}\right)^n = 2^n\left(\cos\left(\frac{\pi q}{m}\right)\right)^n e^{i\frac{\pi n q}{m}}$$

D'où :

$$\sum_{q=0}^{m-1}(\omega^q + 1)^n = \sum_{q=0}^{m-1} 2^n\left(\cos\left(\frac{\pi q}{m}\right)\right)^n e^{i\frac{\pi n q}{m}}$$

En notant que le membre de gauche est un nombre réel, d'après la propriété le reliant à une somme de combinaisons, on en déduit, en prenant la partie réelle du second membre :

$$\sum_{q=0}^{m-1}(\omega^q + 1)^n = 2^n\sum_{q=0}^{m-1}\left(\cos\left(\frac{\pi q}{m}\right)\right)^n cos\left(\frac{\pi n q}{m}\right)$$

D'où la formule, où p est donc la partie entière de $\frac{n}{m}$:

$$\boxed{\boldsymbol{\binom{n}{0} + \binom{n}{m} + \binom{n}{2\,m} + \cdots + \binom{n}{p\,m} = \sum_{j=0}^{p}\binom{n}{j\,m} = \frac{2^n}{m}\sum_{q=0}^{m-1}\left(\cos\left(\frac{\pi q}{m}\right)\right)^n cos\left(\frac{\pi n q}{m}\right)}}$$

Pour les accrocs du sigma, je refais la démonstration en sortant l'artillerie ! On a :

$$(\omega^q + 1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,(\omega^q)^k$$

Donc :

$$\sum_{q=0}^{m-1}(\omega^q + 1)^n = \sum_{q=0}^{m-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,(\omega^q)^k\right)$$

Pif pouf ! une interversion des signes sommes :

$$\sum_{q=0}^{m-1}(\omega^q + 1)^n = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{q=0}^{m-1}\binom{n}{k}\,(\omega^q)^k\right)$$

Pif pouf ! une interversion des puissances et factorisation de la combinaison :

$$\sum_{q=0}^{m-1}(\omega^q + 1)^n = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\sum_{q=0}^{m-1}\,(\omega^k)^q\right)$$

Et là, il n'y a plus qu'à ressortir le fameux :

$$\sum_{q=0}^{m-1} \left(\omega^k\right)^q = m \text{ pour k multiple de } m, 0 \text{ sinon}$$

Et l'affaire est jouée !

Oui mais, c'est aussi comme ça que des matheux à lunettes découragent à jamais des novices. Alors, mon conseil (surtout pour les profs) , allons y progressivement, n'abusons pas du sigma qui ruine la vision globale au profit d'une vision analytique, même si certains (rares) lisent dans le sigma comme d'autres lisent dans le café, ou d'autres dans les entrailles de poulet.

Un conseil de plus, si je peux me permettre, une formule qui vient d'être établie ne peut pas se lâcher comme ça dans la nature comme un chien fou. Elle doit être contrôlée, ab so lu ment !!!!!! C'est comme un pont ou un train qui vient d'être construit. Il faut la tester.

Alors reprenons dans un cas simple ($m = 4$) le calcul, mais directement.

Les racines quatrième de l'unité sont simplement $1, i, -1, -i$ et. On a alors :

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} \dots$$

$$(i+1)^n = \binom{n}{0} + i\binom{n}{1} - \binom{n}{2} - i\binom{n}{3} + \binom{n}{4} \dots$$

$$(-1+1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} \dots$$

$$(-i+1)^n = \binom{n}{0} - i\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + i\binom{n}{3} + \binom{n}{4} \dots$$

$$4\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots\right) = (1+1)^n + (i+1)^n + (-1+1)^n + (-i+1)^n$$

Or :

$$(i+1)^n = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$$

D'où :

$$4\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots\right) = 2^n + \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}} + \left(\sqrt{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}$$

Soit :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots = \frac{2^n + 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{4} = 2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Avec la formule générale maintenant :

$$\frac{2^n}{m}\sum_{q=0}^{m-1}\left(\cos\left(\frac{\pi\, q}{m}\right)\right)^n cos\left(\frac{\pi\, n\, q}{m}\right)$$

$$= \frac{2^n}{4}\left(1+\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^n cos\left(\frac{n\,\pi}{4}\right)+\left(\cos\left(\frac{3\,\pi}{4}\right)\right)^n cos\left(\frac{3\,\pi\, n}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{2^n}{4}\left(1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n cos\left(\frac{n\,\pi}{4}\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n cos\left(\frac{3\, n\,\pi}{4}\right)\right)$$

$$\frac{2^n + 2^{\frac{n}{2}}\,\cos\left(\frac{n\,\pi}{4}\right)+2^{\frac{n}{2}}\,(-1)^n\cos\left(\frac{3\,n\,\pi}{4}\right)}{4}$$

$$= \frac{2^n + 2^{\frac{n}{2}}\,\cos\left(\frac{n\,\pi}{4}\right)+2^{\frac{n}{2}}\,\cos\left(\frac{3\,n\,\pi}{4}-n\,\pi\right)}{4}$$

$$= \frac{2^n + 2^{\frac{n}{2}}\,\cos\left(\frac{n\,\pi}{4}\right)+2^{\frac{n}{2}}\,\cos\left(-\frac{n\,\pi}{4}\right)}{4}$$

$$= \frac{2^n + 2^{\frac{n}{2}+1}\,\cos\left(\frac{n\,\pi}{4}\right)}{4}$$

Ouf !!! Nous retrouvons bien la même formule. Bien sûr nous aurions pu nous contenter de valider la formule pour $n = m = 4$, ce qui aurait été plus simple, mais un peu de travail trigonométrique est bon pour les neurones et qui sait, pourrait prévenir de la maladie d'Alzheimer.