Combinaisons

Problème à résoudre :

Une combinaison de 5 éléments pris dans l'ensemble $[\![1\,;\,11]\!]$ des entiers naturels allant de 1 à 11 est un sous ensemble à 5 éléments de cet ensemble. Combien peut-on alors former de combinaisons différentes ?

Voyons une démarche intelligente que l'on peut employer pour résoudre ce genre de problème.

Trouver une notation symbolique commode :

Par exemple :

C_{11}^{5} (c'est l'ancienne notation)

Ou :

$\binom{11}{5}$ (c'est la nouvelle)

Mais vous auriez pu inventer n'importe quoi, comme :

Mais comme vous n'êtes ni chinois, ni Egyptien, ni peut être même dessinateur, vous préférerez la première ou la deuxième version.

Prendre des exemples de combinaisons :

$$\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}\,;\ \{2\,;5\,;6\,;9\,;10\}$$

Constatez alors qu'une combinaison est une suite strictement croissante de 5 entiers de $[\![1\,;11]\!]$.

<u>**Séparer en deux groupes les sous ensembles**</u> :

C'est toute l'astuce, que vous retrouverez sur l'exercice de la grenouille montant un escalier, qui procède du même esprit.

En effet, il y a dans un premier groupe, les sous ensembles ne contenant pas le dernier entier 11 et dans un second, ceux qui le contiennent.

<u>Exemples</u> :

Sont du premier groupe :

$$\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}\,;\ \{2\,;5\,;6\,;9\,;10\}$$

Sont du second groupe :

$$\{1\,;2\,;3\,;4\,;11\}\,;\ \{2\,;5\,;6\,;9\,;11\}$$

Or le premier groupe est formé des combinaisons à 5 éléments de l'ensemble $[\![1\,;\,10]\!]$. Il contient donc un nombre de combinaisons noté comme nous l'avons vu :

$$\binom{10}{5}$$

Quant au second groupe, étant donné que 11 figure dans chaque combinaison, il y en a autant que de sous ensembles obtenus en enlevant le 11, c'est-à-dire de combinaisons à 4 éléments de l'ensemble $[\![1\,;\,10]\!]$, soit :

$$\binom{10}{4}$$

Le nombre de combinaisons à 5 éléments de $[\![1\,;11]\!]$ est donc :

$$\boxed{\binom{11}{5}=\binom{10}{5}+\binom{10}{4}}$$

Superbe propriété !! N'est il pas ?

Alors à quoi ça sert, me direz vous ?

Eh bien, on peut reprendre le même raisonnement un cran plus bas et écrire :

$$\binom{10}{5} = \binom{9}{5} + \binom{9}{4}$$

$$\binom{10}{4} = \binom{9}{4} + \binom{9}{3}$$

Donc :

$$\boxed{\binom{11}{5} = \binom{9}{5} + 2 \times \binom{9}{4} + \binom{9}{3}}$$

Et alors, me direz vous ?

Eh bien regardez l'ensemble dans lequel on considère les combinaisons. Il est passé de 11 éléments, à 10 puis à 9 et ainsi de suite. On va bien finir par tomber sur un ensemble pour lequel le dénombrement sera trivial (grossier, facile, pour ceux qui ne connaissent pas le mot).

Alors c'est là que nous allons utiliser ce que nous avons de plus précieux en maths, le sens du rangement, bref l'ordre, mais pas celui qui fait du bruit avec des bottes tout de même !.

Disposons donc toutes les combinaisons dans un tableau, avec en ligne le nombre d'éléments pris dans l'ensemble et en colonne le nombre d'éléments de l'ensemble dans lequel on extrait les combinaisons.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	$\binom{1}{1}$										
2	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$									
3	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$								
4	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$							
5	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$						
6	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$					
7	$\binom{7}{1}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{7}{5}$	$\binom{7}{6}$	$\binom{7}{7}$				
8	$\binom{8}{1}$	$\binom{8}{2}$	$\binom{8}{3}$	$\binom{8}{4}$	$\binom{8}{5}$	$\binom{8}{6}$	$\binom{8}{7}$	$\binom{8}{8}$			
9	$\binom{9}{1}$	$\binom{9}{2}$	$\binom{9}{3}$	$\binom{9}{4}$	$\binom{9}{5}$	$\binom{9}{6}$	$\binom{9}{7}$	$\binom{9}{8}$	$\binom{9}{9}$		
10	$\binom{10}{1}$	$\binom{10}{2}$	$\binom{10}{3}$	$\binom{10}{4}$	$\binom{10}{5}$	$\binom{10}{6}$	$\binom{10}{7}$	$\binom{10}{8}$	$\binom{10}{9}$	$\binom{10}{10}$	
11	$\binom{11}{1}$	$\binom{11}{2}$	$\binom{11}{3}$	$\binom{11}{4}$	$\binom{11}{5}$	$\binom{11}{6}$	$\binom{11}{7}$	$\binom{11}{8}$	$\binom{11}{9}$	$\binom{11}{10}$	$\binom{11}{11}$

Oulala ! Ca fait déjà du bon tableau ! Ne fuyez pas, c'est juste pour vous montrer quelque chose de remarquable dans ce tableau.

D'abord, ce que l'on cherche figure à la onzième ligne et la cinquième colonne en rouge et la première relation traduit que le contenu de la cellule rouge est égal à la somme des contenus des deux cellules bleues et cela vaut dans tout le tableau.

Ensuite, la première colonne du tableau n'est formée que de nombres égaux aux numéros de ligne et la dernière cellule de chaque ligne contient 1.

Par exemple :

$$\binom{9}{1} = 9$$

$$\binom{9}{9} = 1$$

Cela donne :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1										
2	2	1									
3	3	$\binom{3}{2}$	1								
4	4	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	1							
5	5	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	1						
6	6	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	1					
7	7	$\binom{7}{2}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{7}{5}$	$\binom{7}{6}$	1				
8	8	$\binom{8}{2}$	$\binom{8}{3}$	$\binom{8}{4}$	$\binom{8}{5}$	$\binom{8}{6}$	$\binom{8}{7}$	1			
9	9	$\binom{9}{2}$	$\binom{9}{3}$	$\binom{9}{4}$	$\binom{9}{5}$	$\binom{9}{6}$	$\binom{9}{7}$	$\binom{9}{8}$	1		
10	10	$\binom{10}{2}$	$\binom{10}{3}$	$\binom{10}{4}$	$\binom{10}{5}$	$\binom{10}{6}$	$\binom{10}{7}$	$\binom{10}{8}$	$\binom{10}{9}$	1	
11	11	$\binom{11}{2}$	$\binom{11}{3}$	$\binom{11}{4}$	$\binom{11}{5}$	$\binom{11}{6}$	$\binom{11}{7}$	$\binom{11}{8}$	$\binom{11}{9}$	$\binom{11}{10}$	1

A partir de cela, il est facile d'évaluer tous les éléments du tableau de proche en proche en partant du haut du tableau et en descendant selon le principe que la somme de deux cases, telles que celles apparaissant en bleu, donne le nombre de la case en rouge située la ligne suivante.

Ainsi le premier nombre évalué est :

$$\binom{3}{2} = 2 + 1 = 3$$

Et ainsi de suite. On aboutit alors au tableau complet :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1										
2	2	1									
3	3	3	1								
4	4	6	4	1							
5	5	10	10	5	1						
6	6	15	20	15	6	1					
7	7	21	35	35	21	7	1				
8	8	28	56	70	56	28	8	1			
9	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
10	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
11	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

Un jeu d'enfant n'est ce pas ? Ca vaut bien le Sudoku !

Nous avons donc la réponse à notre problème initial :

$$\binom{11}{5} = 462$$

Pour les utilisateurs inconditionnels du tableur, comme je suis, il est aisé de créer un tel tableau afin d'obtenir les combinaisons jusqu'à un nombre d'éléments élevés, ce qui peut permettre entre autres de faire le graphique d'une loi binomiale aisément.

Il existe une autre manière d'obtenir le nombre précédent, à partir du calcul d'un nombre d'arrangements, nous y reviendrons. L'avantage du tableau précédent est de donner un grand nombre de combinaisons par une série d'additions élémentaires.

Cependant, les lignes de notre tableau présentent une symétrie qui n'est pas complète. Cela invite à rajouter une colonne de numéro 0 à gauche et pour que le mécanisme d'addition se conserve, il faut poser :

$$\binom{1}{0} = \binom{2}{0} = \binom{3}{0} = \cdots = 1$$

Et tant qu'on y est :

$$\binom{0}{0} = 1$$

Ce qui amène à rajouter une ligne de numéro 0 également.

Le tableau complet, qui s'appelle, **triangle de Pascal**, compte tenu de sa forme, et du nom du Mathématiciens aux célèbres Pensées, devient alors :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1											
1	1	1										
2	1	2	1									
3	1	3	3	1								
4	1	4	6	4	1							
5	1	5	10	10	5	1						
6	1	6	15	20	15	6	1					
7	1	7	21	35	35	21	7	1				
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1			
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

Quel sens donner alors à cette nouvelle colonne introduite. Eh bien, on peut en trouver un et c'est toujours mieux pour éviter de se noyer dans les abstractions qui sont bien souvent plus concrètes qu'il n'y paraît.

Prenons par exemple :

$$\binom{9}{0}$$

Si nous étendons la définition donnée à ce symbole, c'est le nombre de sous ensembles à 0 éléments pouvant être formés avec les entiers de $[\![1 ; 9]\!]$.

A première vue, vous me direz, il n'y en a pas, ou la question n'a pas de sens. En fait si, on peut lui en donner un, si on considère l'ensemble vide noté $\{\}$ ou $\emptyset$ comme un sous ensemble de $[\![1 ; 9]\!]$. Cet ensemble vide est alors la seule combinaison possible.

De même, de l'ensemble vide, on ne peut extraire qu'un seul sous ensemble à 0 élément, c'est l'ensemble vide lui-même, ce qui justifie :

$$\binom{0}{0} = 1$$

Vous comprenez mieux maintenant pourquoi on vous ressort ce fichu ensemble vide à toutes les sauces en maths. Ca rend les tableaux plus complets et donc les problèmes plus faciles à résoudre.