Centres d'inertie -moments d'inertie-Théorème d'Huygens

Nous allons mettre en évidence dans ce fichier le centre d'inertie d'un système matériel ainsi que la notion de moment d'inertie par rapport à un axe.

Centre d'inertie

Etant donné un système formé de *N* particules matérielles, chacune étant repérée par un indice i, de masse m_i, de position instantanée M_i pouvant évoluer dans le temps, le centre d'inertie, est l'unique point *G* de l'espace tel que :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{M_i G} = \vec{0}}$$

Prouvons qu'un tel point existe et est unique :

O étant un point quelconque, l'origine d'un repère orthonormé par exemple, l'équation précédente posée sur l'inconnue *G*, est équivalente aux suivantes :

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\overrightarrow{M_i O} + \overrightarrow{OG}\right) = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \overrightarrow{M_i O}\right) + \sum_{i=1}^{N} \left(m_i \overrightarrow{OG}\right) = \vec{0}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{N} \left(m_i \overrightarrow{OM_i}\right)$$

Le centre d'inertie *G* est donc défini de façon unique par la relation :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\,\overrightarrow{OM_i}\right)}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\,\overrightarrow{OM_i}\right)}{m}}$$

Ainsi, ses coordonnées dans un repère orthonormé direct (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) seront :

$$\boxed{\begin{cases} x_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(m_i\,x_i)}{m} \\ y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(m_i\,y_i)}{m} \\ z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(m_i\,z_i)}{m} \end{cases}}$$

Dans le cas où la masse du système matériel peut être vue comme répartie sur une surface, on définit une densité surfacique de masse $\sigma(x\,;y\,;z)$ par :

$$\boxed{\sigma(x\,;y\,;z) = \frac{dm(x\,;y\,;z)}{dS}}$$

où $dm(x\,;y\,;z)$ désigne la masse infinitésimale d'un élément de surface dS.

Lorsque la masse est équitablement répartie sur la surface, on a :

$$\boxed{\sigma(x\,;y\,;z) = \frac{m}{S}}$$

Les formules définissant le centre d'inertie deviennent alors :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\iint_S \overrightarrow{OM}\, dm}{m} = \frac{\iint_S \sigma\, \overrightarrow{OM}\, dS}{m}}$$

Soit en coordonnées :

$$\boxed{\begin{cases} x_G = \dfrac{\iint_S x\, dm}{m} = \dfrac{\iint_S x\, \sigma\, dS}{m} \\ y_G = \dfrac{\iint_S y\, dm}{m} = \dfrac{\iint_S y\, \sigma\, dS}{m} \\ z_G = \dfrac{\iint_S z\, dm}{m} = \dfrac{\iint_S z\, \sigma\, dS}{m} \end{cases}}$$

Enfin, le système peut être vu souvent comme un volume. On définit alors la densité volumique de masse $\rho(x\,;y\,;z)$ comme étant :

$$\boxed{\rho(x\,;y\,;z) = \frac{dm(x\,;y\,;z)}{dx\, dy\, dz} = \frac{dm}{dV}}$$

où $dm(x\,;y\,;z)$ désigne la masse infinitésimale d'un élément de volume dV.

Lorsque la masse est équitablement répartie dans le volume, on a :

$$\boxed{\rho(x\,;y\,;z) = \frac{m}{V}}$$

Les formules définissant le centre d'inertie deviennent alors :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\iiint_V \overrightarrow{OM}\, dm}{m} = \frac{\iiint_V \rho\, \overrightarrow{OM}\, dV}{m}$$

Soit en coordonnées :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\iiint_V x\, dm}{m} = \dfrac{\iint_S x\, \rho\, dV}{m} \\ y_G = \dfrac{\iiint_V y\, dm}{m} = \dfrac{\iint_S y\, \rho\, dV}{m} \\ z_G = \dfrac{\iiint_V z\, dm}{m} = \dfrac{\iint_S z\, \rho\, dV}{m} \end{cases}$$

Propriétés dynamiques du centre d'inertie

Rappelons les propriétés du centre d'inertie démontrées dans le fichier sur la dynamique des systèmes généraux :

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \, \frac{d\overrightarrow{OM_\iota}}{dt} \right) = m \, \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \, \frac{d^2\overrightarrow{OM_\iota}}{dt^2} \right) = m \, \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}$$

Moments d'inertie- Théorème d'Huygens

Reprenant notre système de masses ponctuelles précédent, nous définissons le moment d'inertie de ce système par rapport à une droite Δ comme étant :

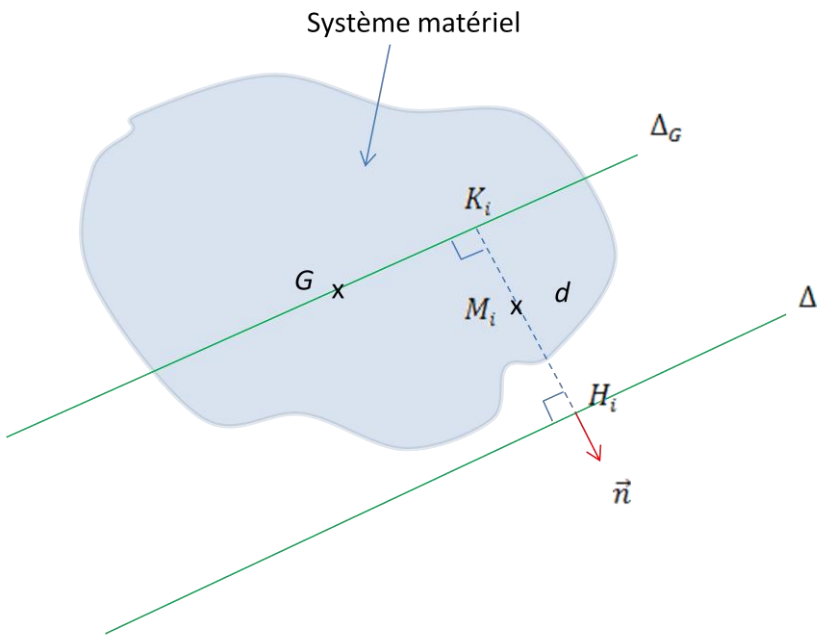
$$\boxed{J_\Delta = \sum_{i=1}^{N} m_i\, {r_i}^2}$$

r_i étant la distance du point M_i où se trouve la masse m_i à l'axe Δ.

Considérons alors la droite Δ_G qui est la parallèle à la droite Δ passant par G.

Notons alors :

- H_i le projeté du point M_i sur la droite Δ
- K_i le projeté du point M_i sur la droite Δ_G
- *d* la distance entre les droites Δ et Δ_G
- $\vec{n}$ le vecteur unitaire orthogonal à Δ et pointant de Δ_G vers Δ



Nous avons alors :

$$
\begin{aligned}
J_\Delta &= \sum_{i=1}^{N} m_i\, M_i H_i{}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\overrightarrow{M_\iota K_\iota} + \overrightarrow{K_\iota H_\iota}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N} m_i\, M_i K_i{}^2 + 2 \sum_{i=1}^{N} m_i\, \overrightarrow{M_\iota K_\iota} \cdot \overrightarrow{K_\iota H_\iota} + \sum_{i=1}^{N} m_i\, K_i H_i{}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N} m_i\, M_i K_i{}^2 + 2 \sum_{i=1}^{N} m_i\, \overrightarrow{M_\iota K_\iota} \cdot \overrightarrow{K_\iota H_\iota} + \sum_{i=1}^{N} m_i\, K_i H_i{}^2 \\
&= J_{\Delta_G} + 2 \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\, \overrightarrow{M_\iota K_\iota}\right) \cdot d\, \vec{n} + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) d^2 \\
&= J_{\Delta_G} + 2 \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\overrightarrow{M_\iota G} + \overrightarrow{G K_\iota}\right)\right) \cdot d\, \vec{n} + m\, d^2 \\
&= J_{\Delta_G} + 2 \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\, \overrightarrow{G K_\iota}\right) \cdot d\, \vec{n} + m\, d^2
\end{aligned}
$$

Soit finalement, puisque $\overrightarrow{GK_\iota} \perp \vec{n}$:

$$\boxed{J_\Delta = J_{\Delta_G} + m\, d^2}$$

C’est le théorème d’Huygens, qui permet de calculer le moment d’inertie par rapport à une droite, à partir du moment d’inertie par rapport à la droite parallèle passant par le centre d’inertie.