Intégrales impropres remarquables

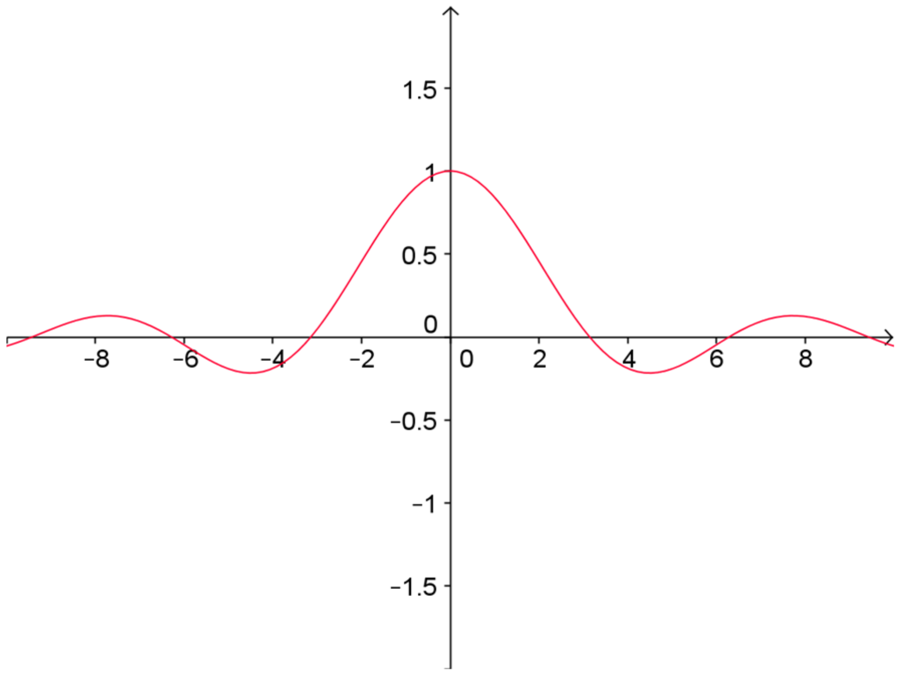
I Intégrales impropres trigonométriques

1) Intégrale impropre de référence

Nous nous proposons de déterminer l'intégrale impropre suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$$

dont voici la courbe représentative de la fonction à intégrer :



2) Préliminaire :

Nous allons établir la propriété suivante

Si f est une fonction intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $[a;b]$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\, sin(n\, x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\, cos(n\, x)\, dx = 0$$

Preuve :

Cette propriété est intuitive. En effet, une fonction intégrable au sens de Riemann n'est, somme toute, pas très éloignée d'une fonction en escalier. Etablissons donc le résultat pour une fonction en escalier sur $[a;b]$ associée à une subdivision :

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_p = b$$

et telle que

$$\forall\, k \in [\![0;p-1]\!] : \forall\, x \in]x_k\,;x_{k+1}[\ \ \varphi(x) = \ c_k$$

alors :

$$\int_a^b \varphi(x)\,sin(n\,x)\,dx = \sum_{k=0}^{p-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} c_k\,sin(n\,x)\,dx = \sum_{k=0}^{p-1} c_k\,\left[\frac{-\,cos(n\,x)}{n}\right]_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} c_k\,\frac{(cos(n\,x_k) - cos(n\,x_{k+1}))}{n} = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} c_k\,(cos(n\,x_k) - cos(n\,x_{k+1}))}{n}$$

Donc :

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\,sin(n\,x)\,dx\right| \leq \frac{\sum_{k=0}^{p-1}|c_k|\,(|cos(n\,x_k)| + |cos(n\,x_{k+1})|)}{n} \leq \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{p-1}|c_k|$$

On en déduit par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi(x)\,sin(n\,x)\,dx = 0$$

Un travail analogue se fait avec le cosinus.

Voyons alors la preuve générale.

Si f est une fonction intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $[a;b]$ alors pour $\varepsilon > 0$ il existe deux fonctions φ et α en escaliers sur $[a;b]$ telles que :

$$\forall\, x \in [a;b] :\ |f(x) - \varphi(x)| \leq \alpha(x)$$

et :

$$\int_a^b \alpha(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

Alors, pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\int_a^b f(x)\,sin(n\,x)\,dx = \int_a^b \big(f(x)-\varphi(x)\big)\,sin(n\,x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\ sin(n\,x)\,dx$$

donc :

$$\left|\int_a^b f(x)\,sin(n\,x)\,dx\right| \le \int_a^b\ |f(x)-\varphi(x)|\,|sin(n\,x)|dx + \left|\int_a^b \varphi(x)\ sin(n\,x)\,dx\right|$$

Soit par majoration :

$$\left|\int_a^b f(x)\,sin(n\,x)\,dx\right| \le \int_a^b\ |f(x)-\varphi(x)|\,dx + \left|\int_a^b \varphi(x)\ sin(n\,x)\,dx\right|$$

Finalement :

$$\left|\int_a^b f(x)\,sin(n\,x)\,dx\right| \le \int_a^b\ \alpha(x)\,dx + \left|\int_a^b \varphi(x)\ sin(n\,x)\,dx\right|$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_a^b \varphi(x)\ sin(n\,x)\,dx\right| = 0$$

Donc :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0\ \Rightarrow\ \left|\int_a^b \varphi(x)\ sin(n\,x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où :

$$n > n_0\ \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,sin(n\,x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Donc :

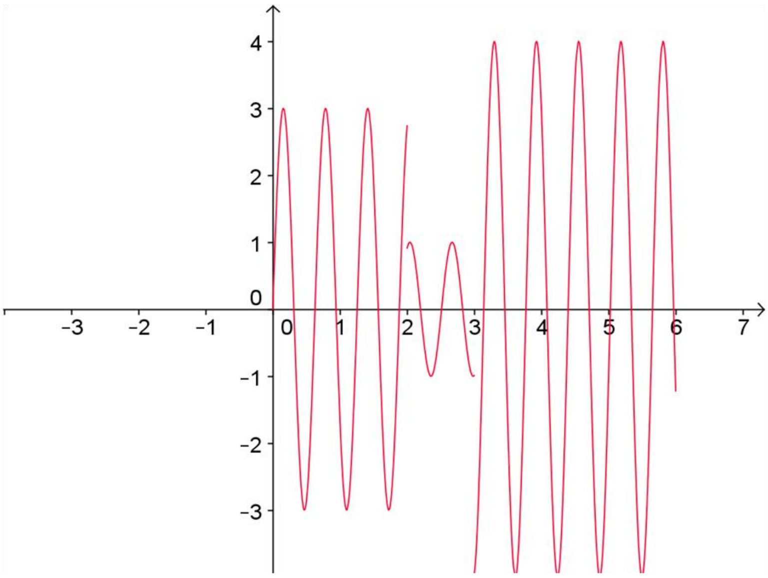
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\,sin(n\,x)\,dx = 0$$

Nous avons représenté sur le graphique de la fonction $\varphi(x)\ sin(n\,x)$ pour φ définie sur $[0;6]$ par :

$$\varphi(x) = 3 \quad \text{sur } [0;2[$$

$$\varphi(x) = 1 \quad \text{sur } [2;3[$$

$$\varphi(x) = 4 \quad \text{sur } [3;6]$$



Or plus n est grand, plus la fonction $sin(n\,x)$ présente de périodes sur un intervalle de subdivision, et l'intégrale d'un sinus sur une période est nulle. Voilà qui était de nature à former l'intuition du résultat.

3) Convergence de l'intégrale en 0

Nous avons :

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

Donc l'intégrale converge en 0

4) Convergence de l'intégrale en $+\infty$

Considérons la fonction intégrale associée :

$$F(x) = \int_1^x \frac{sin(t)}{t} dt$$

Et faisons une intégration par partie en posant :

$$u(t) = \frac{1}{t} \quad , \qquad v'(t) = sin(t)$$

$$u'(t) = -\frac{1}{t^2} \quad , \qquad v(t) = -\,cos(t)$$

$$F(x) = \left[\frac{-\,cos\,(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{cos(t)}{t^2}dt = cos(1) - \frac{cos\,(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

Or :

$$\forall\, t > 0 : \ \left|\frac{cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$$

Donc l'intégrale de $\frac{\cos(t)}{t^2}$ est absolument convergente en $+\infty$.

De plus :

$$\forall\, x > 0 : \ \left|\frac{cos\,(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$$

Donc, par théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to\,+\infty} \frac{cos\,(x)}{x} = 0$$

On en déduit :

$$\lim_{t\to\,+\infty} F(x) = cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

Donc l'intégrale converge en $+\infty$

5) <u>Formule trigonométrique remarquable</u>

Dans le fichier sur les applications des nombres complexes, nous avons établi une formule remarquable pour tout $t \neq 2\,k\,\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\boldsymbol{1 + cos(t) + cos(2\,t) + \cdots + cos(n\,t) = \frac{sin\left(\frac{(n+1)\,t}{2}\right)\,cos\left(\frac{n\,t}{2}\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)}}}$$

Lorsque $t = 2\,k\,\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$ posons :

$$x = t - 2\,k\,\pi$$

alors :

$$\frac{sin\left(\frac{(n+1)\,t}{2}\right)\,cos\left(\frac{n\,t}{2}\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{sin\left(\frac{(n+1)\,(x+2\,k\,\pi)}{2}\right)\,cos\left(\frac{n\,(x+2\,k\,\pi)}{2}\right)}{sin\left(\frac{(x+2\,k\,\pi)}{2}\right)}$$

$$= \frac{(-1)^{(n+1)\,k}\,sin\left(\frac{(n+1)\,x}{2}\right) \times (-1)^{n\,k}\,cos\left(\frac{n\,x}{2}\right)}{(-1)^{\,k}\,sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{(-1)^{(n+1)\,k}\,sin\left(\frac{(n+1)\,x}{2}\right) \times (-1)^{n\,k}\,cos\left(\frac{n\,x}{2}\right)}{(-1)^{\,k}\,sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\frac{sin\left(\frac{(n+1)\,x}{2}\right)\,cos\left(\frac{n\,x}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

et, en prenant un équivalent :

$$\lim_{t\to 2\,k\,\pi} \frac{sin\left(\frac{(n+1)\,t}{2}\right)\,cos\left(\frac{n\,t}{2}\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{sin\left(\frac{(n+1)\,x}{2}\right)\,cos\left(\frac{n\,x}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} = (n+1)$$

La relation initiale est donc prolongeable par continuité à toutes les valeurs de t

Or nous avons :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^* :\ \int_0^{\pi} cos(k\,t)\,dt = \left[\frac{\sin(k\,t)}{k}\right]_0^{\pi} = 0$$

On en déduit :

$$\int_0^{\pi} \frac{sin\left(\frac{(n+1)\,t}{2}\right)\,cos\left(\frac{n\,t}{2}\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt = \int_0^{\pi} 1\,dt + \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} cos(k\,t)\,dt = \pi$$

Rappelons alors la formule de trigonométrie :

$$sin(a)\,cos(b) = \frac{1}{2}\,(\sin(a+b) + \sin\,(a-b))$$

d'où :

$$sin\left(\frac{(n+1)\ t}{2}\right)\ cos\left(\frac{n\ t}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\ t\right) + sin\ \left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

Donc :

$$\int_0^\pi \frac{sin\left(\frac{(n+1)\ t}{2}\right)\ cos\left(\frac{n\ t}{2}\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt = \int_0^\pi \frac{sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\ t\right)}{2\ sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt + \frac{1}{2}\int_0^\pi 1\ dt$$

D'où finalement :

$$\boxed{\int_0^\pi \frac{sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\ t\right)}{2\ sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt = \frac{\pi}{2}}$$

Notons alors que cette relation se met sous la forme :

$$\int_0^\pi \frac{sin\left((2\ n+1)\ \frac{t}{2}\right)}{2\ sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt = \frac{\pi}{2}$$

soit par changement de variable :

$$t = 2\ x$$

$$dt = 2\ dx$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin((2\ n+1)\ x)}{sin(x)} dx = \frac{\pi}{2}}$$

Nous pouvons alors faire appel à l'intuition pour déterminer quelle suite donner. En effet, nous avons vu d'une part, que pour toute fonction f intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $[a;b]$ nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\ sin(n\ x)\ dx = 0$$

En particulier, comme suite extraite :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, sin\big((2\,n+1)\,x\big)\, dx = 0$$

Appliquons cela à la fonction sur un intervalle de type $\left[\alpha; \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right]$ avec $\alpha > 0$ et « petit »

$$f(x) = \frac{1}{sin(x)}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\alpha}^{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}} \frac{sin\big((2\,n+1)\,x\big)}{sin(x)}\, dx = 0$$

Autrement dit, nous percevons intuitivement que l'on devrait avoir :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{0}^{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}} \frac{sin\big((2\,n+1)\,x\big)}{sin(x)}\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbf{0}}^{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}} \frac{sin\big((2\,n+1)\,x\big)}{x}\, dx$$

car la fonction $sin(x)$ est équivalente à la fonction x au voisinage de 0

Nous allons prouver que notre intuition est exacte en considérant la différence des deux intégrales :

$$\int_{\mathbf{0}}^{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}} \frac{sin\big((2\,n+1)\,x\big)}{sin(x)}\, dx - \int_{\mathbf{0}}^{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}} \frac{sin\big((2\,n+1)\,x\big)}{x}\, dx$$

$$= \int_{\mathbf{0}}^{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}} \left(\frac{sin\big((2\,n+1)\,x\big)}{sin(x)} - \frac{sin\big((2\,n+1)\,x\big)}{x}\right) dx$$

$$= \int_{\mathbf{0}}^{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}} \left(\frac{1}{sin(x)} - \frac{1}{x}\right) sin\big((2\,n+1)\,x\big)\; dx$$

Posons :

$$\forall\, x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right] \;:\; f(x) = \frac{1}{sin(x)} - \frac{1}{x}$$

$$f(0) = 0$$

Montrons que f est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc intégrable au sens de Riemann.

$$f(x) = \frac{1}{sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - sin\ (x)}{x\ sin\ (x)}$$

Un développement limité en 0 donne alors :

$$f(x) = \frac{x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x\ sin\ (x)} \sim \frac{x^3}{6\ x^2} \sim \frac{x}{6}$$

f est donc continue en 0 donc sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

La différence des deux intégrales tend donc bien vers 0. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin\left((2\ n + 1)\ x\right)}{x} dx = \frac{\pi}{2}}$$

Faisons alors un ultime changement de variable en posant :

$$t = (2\ n + 1)\ x$$

$$dt = (2\ n + 1)\ dx$$

alors :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin\left((2\ n + 1)\ x\right)}{x} dx = \int_0^{\frac{(2\ n+1)\ \pi}{2}} \frac{sin(t)}{t} dt$$

On en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{(2\ n+1)\ \pi}{2}} \frac{sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

D'où :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}}$$

Soit, compte tenu de la parité de la fonction intégrée :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{sin(t)}}{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{dt} = \boldsymbol{\pi}}$$

6) **Intégrales impropres déduites** :

Considérons la suite :

$$U_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{sin(t)}{t} dt$$

et faisons l'intégration par partie :

$$u(t) = \frac{1}{t} \quad , \qquad v'(t) = sin(t)$$

$$u'(t) = -\frac{1}{t^2} \quad , \qquad v(t) = 1 - \; cos(t)$$

alors :

$$U_n = \left[\frac{1 - \cos(t)}{t}\right]_{\frac{1}{n}}^{n} + \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1 - cos(t)}{t^2} dt$$

$$= \frac{1 - cos(n)}{n} - \; n\left(1 - cos\,\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

Or , l'intégrale impropre de $\frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est absolument convergente en $+\infty$ car la fonction est dominée en valeur absolue par $\frac{1}{t^2}$ et convergente en 0 car elle tend vers $\frac{1}{2}$

et, par développement limité simple :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - cos(n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - cos\,\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0$$

On en déduit :

$$\boxed{\int_{\mathbf{0}}^{+\infty} \frac{\mathbf{1} - \boldsymbol{cos(t)}}{\boldsymbol{t^2}} \boldsymbol{dt} = \int_{\mathbf{0}}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{sin(t)}}{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{dt} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}}$$

Or, par un nouveau changement de variable, en posant :

$$t = 2\,x$$

$$dt = 2\,dx$$

On a :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{2\,sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2}\,dt = \int_{\frac{1}{2\,n}}^{\frac{n}{2}} \frac{sin^2(x)}{x^2}\,dx$$

On en déduit , par passage à la limite :

$$\boxed{\int_{0}^{+\infty} \frac{sin^2(x)}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}}$$

Soit encore par parité :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin^2(x)}{x^2}\,dx = \pi}$$

II Intégrales impropres exponentielles

1) Intégrale impropre de référence

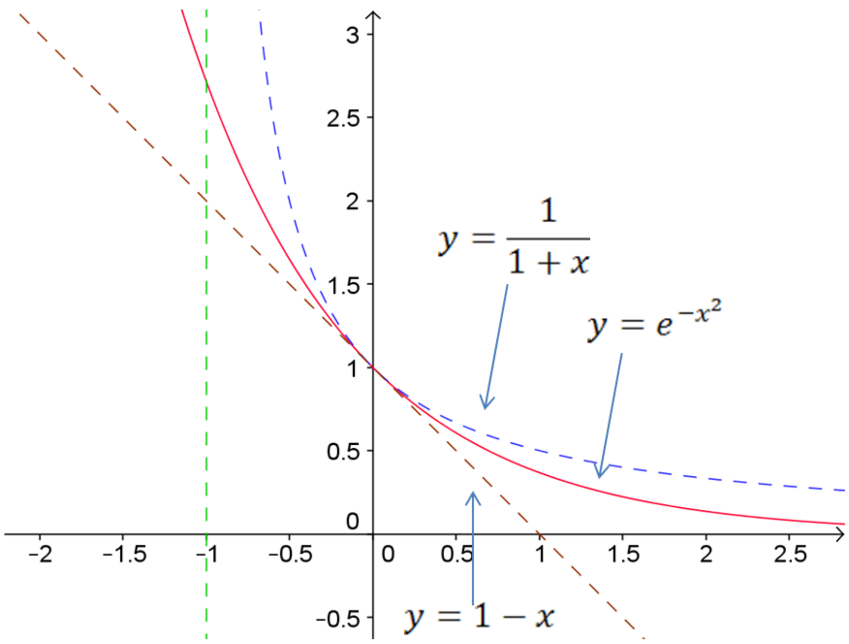
Nous nous proposons de déterminer l'intégrale impropre suivante :

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

Pour cela, nous allons commencer par encadrer la fonction e^{-x} par deux fonctions tangentes au voisinage de 0.

Etape 1 :

Le graphique de la fonction e^{-x} suggère un tel encadrement :



à savoir :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \left]-\mathbf{1};\, +\infty\right[: \quad \mathbf{1} - \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}} \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{x}}$$

<u>Preuve :</u>

Montrons que l'on a plus généralement :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad 1 + x \leq e^x$$

Ce qui n'est que la traduction du fait que la courbe, par sa convexité, est au dessus de sa tangente en 0.

Introduisons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 + x - e^x$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad f'(x) = 1 - e^x$$

Donc :

$$\forall\, x \in \left]0;\, +\infty\right[\; : f'(x) < 0$$

$$\forall\, x \in \left]-\infty;\, 0\right[\; : f'(x) > 0$$

f est donc strictement croissante sur $\left]-\infty;\, 0\right[$ et strictement croissante sur $\left]0;\, +\infty\right[$ donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \; f(x) \leq f(0) = 0$$

Ce qui établit l'inégalité.

En appliquant l'inégalité à $-x$ on obtient :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ 1 - x \leq e^{-x}$$

En se plaçant sur $]-1;\ +\infty[$ on a **:**

$$0 < 1 + x \leq e^{x}$$

d'où en inversant :

$$\frac{1}{1+x} \geq \frac{1}{e^{x}}$$

soit :

$$e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}$$

<u>Etape 2 :</u>

Les deux courbes tangentes ne donnant un encadrement serré de la courbe de l'exponentielle qu'au voisinage de 0, nous imaginons, pour un intervalle de valeurs de x de la forme $[0;\ a]$ avec $a > 0$, qu'en prenant un entier n suffisamment grand, l'encadrement suivant pourra être rendu aussi serré qu'on le souhaite.

Aussi peut on écrire :

$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\ \ \forall\, \boldsymbol{x} \in\ [\mathbf{0}\ ;\ \boldsymbol{n}] :\quad \mathbf{0} \leq \mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{n}} \leq \boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{n}}} \leq \left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{n}}\right)^{-\mathbf{1}}}$$

Nous pouvons alors élever à la puissance n ces inégalités et nous obtenons :

$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\ \ \forall\, \boldsymbol{x} \in\ [\mathbf{0}\ ;\ \boldsymbol{n}] :\quad \mathbf{0} \leq \left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}} \leq \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}} \leq \left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{n}}\right)^{-\boldsymbol{n}}}$$

d'où en remplaçant x par x^2 :

$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\ \ \forall\, \boldsymbol{x} \in\ \left[\mathbf{0}\ ;\ \sqrt{\boldsymbol{n}}\right] :\quad \left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}} \leq \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}} \leq \left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{n}}\right)^{-\boldsymbol{n}}}$$

<u>Etape 3 </u>: Encadrement intégral

$$\boxed{\int_{\mathbf{0}}^{\sqrt{\boldsymbol{n}}} \left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{dx} \leq \int_{\mathbf{0}}^{\sqrt{\boldsymbol{n}}} \boldsymbol{e}^{-x^{2}} \boldsymbol{dx} \leq \int_{\mathbf{0}}^{\sqrt{\boldsymbol{n}}} \left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{n}}\right)^{-\boldsymbol{n}} \boldsymbol{dx}}$$

Effectuons des changements de variable pour les intégrales de gauche et de droite :

Pour :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx$$

On pose :

$$x = \sqrt{n}\, sin(t)$$

$$dx = \sqrt{n}\, cos(t)\, dt$$

Alors :

$$\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n = \left(1 - sin^2(t)\right)^n = cos^{2\,n}(t)$$

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2\,n+1}(t)\, dt$$

Pour :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$$

On pose :

$$x = \sqrt{n}\, tan(t)$$

$$dx = \frac{\sqrt{n}}{cos^2(t)}\ \ dt$$

Alors :

$$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} = \left(1 + tan^2(t)\right)^{-n} = \left(\frac{1}{cos^2(t)}\right)^{-n} = cos^{2\,n}(t)$$

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^{2\,n-2}(t)\, dt \le \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2\,n-2}(t)\, dt$$

Ainsi :

$$\sqrt{n}\ I_{2\,n+1} \leq \int_{0}^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n}\ I_{2\,n-2}$$

en posant :

$$I_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)\, dt$$

__Etape 4__ :

Détermination d'un équivalent pour I_n

I_n est associée à la suite :

$$J_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)\, dt$$

En faisant le changement de variable :

$$t = \frac{\pi}{2} - x$$

$$dt = -dx$$

On obtient :

$$J_n = I_n$$

Il est donc indifférent de travailler avec I_n ou J_n. Nous choisirons par exemple J_n. Nous avons alors :

$$J_0 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^0(t)\, dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt = \frac{\pi}{2}$$

$$J_1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin(t)\, dt = [-cos\,(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Pour $n \geq 2$:

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)\, sin^{n-1}(t)\, dt$$

Faisons une intégration par partie en posant :

$$u'(t) = sin(t) \quad , \quad v(t) = sin^{n-1}(t)$$

$$u(t) = -\,cos(t) \quad , \quad v'(t) = (n-1)\, sin^{n-2}(t)\, cos\,(t)$$

Nous avons :

$$J_n = [-co\,s(t)\ \ sin^{n-1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(t)\, cos^2(t) dt$$

$$J_n = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(t) \left(1 - sin^2(t)\right) dt$$

$$J_n = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(t)\ \ dt - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n}(t)\ \ dt$$

$$J_n = (n-1)\ J_{n-2} - (n-1)\ J_n$$

Soit :

$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{2} :\ \ \boldsymbol{J_n} = \frac{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{n}}\, \boldsymbol{J_{n-2}}}$$

Cette relation de récurrence amène à considérer les termes de rang pair et ceux de rang impairs séparément :

$$\boxed{\begin{gathered} \forall\, \boldsymbol{p} \in \mathbb{N} :\ \ \boldsymbol{J_{2\,p}} = \frac{\boldsymbol{2\,p-1}}{\boldsymbol{2\,p}}\, \boldsymbol{J_{2\,p-2}} \\ \forall\, \boldsymbol{p} \in \mathbb{N} :\ \ \boldsymbol{J_{2\,p+1}} = \frac{\boldsymbol{2\,p}}{\boldsymbol{2\,p+1}}\, \boldsymbol{J_{2\,p-1}} \end{gathered}}$$

La première donne par récurrence :

$$J_{2\,p} = \frac{2\,p-1}{2\,p} \times \frac{2\,p-3}{2\,p-2}\, J_{2\,p-4} = \frac{2\,p-1}{2\,p} \times \frac{2\,p-3}{2\,p-2} \times \ldots\, \frac{1}{2} \times J_0$$

$$J_{2\,p} = \frac{(2\,p)\,!}{\big((2\,p) \times (2\,p-2) \times \ldots \times 2\big)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2\,p)\,!}{(2^p\,p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{J_{2\,p} = \frac{(2\,p)\,!}{(2^p\,p!)^2} \times \frac{\pi}{2}}}$$

De même :

$$J_{2\,p+1} = \frac{2\,p}{2\,p+1} \times \frac{2\,p-2}{2\,p-1}\, J_{2\,p-1} = \frac{2\,p}{2\,p+1} \times \frac{2\,p-2}{2\,p-1} \times \ldots\, \frac{2}{3} \times J_1$$

$$\boxed{\boldsymbol{J_{2\,p+1} = \frac{(2^p\,p!)^2}{(2\,p+1)\,!}}}$$

Observons alors :

$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{p} \in \mathbb{N} \;:\; \boldsymbol{J_{2\,p}\; J_{2\,p+1} = \frac{\pi}{2\,(2\,p+1)}}}$$

De plus pour tout entier naturel n :

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(sin^{n+1}(t)\; - sin^n(t)\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)\,(sin(t)\; - 1)\; dt$$

Or :

$$\forall\, t \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]\;\; sin^n(t)\,(sin(t)\; - 1) \le 0$$

Donc :

$$J_{n+1} - J_n \le 0$$

La suite J_n est donc décroissante.

On en déduit :

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \;:\; J_{2\,p+2} \le J_{2\,p+1} \le J_{2\,p}$$

Soit :

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \;:\; \frac{2\,p+1}{2\,p+2}\,J_{2\,p} \leq J_{2\,p+1} \leq J_{2\,p}$$

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \;:\; \frac{2\,p+1}{2\,p+2} \leq \frac{J_{2\,p+1}}{J_{2\,p}} \leq 1$$

Or :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{2\,p+1}{2\,p+2} = 1$$

Donc, par théorème des gendarmes :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{J_{2\,p+1}}{J_{2\,p}} = 1$$

Les suites $J_{2\,p}$ et $J_{2\,p+1}$ sont donc équivalentes.

On en déduit

$$J_{2\,p}\;J_{2\,p+1} \sim {J_{2\,p}}^2 \sim \frac{\pi}{2\,(2\,p+1)}$$

d'où :

$$J_{2\,p} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\,\sqrt{p}}$$

On en déduit :

$$\sqrt{n}\;\;I_{2\,n+1} \sim \sqrt{n}\;\frac{\sqrt{\pi}}{2\,\sqrt{p}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\sqrt{n}\;\;I_{2\,n-2} \sim \sqrt{n}\;\;\frac{\sqrt{\pi}}{2\,\sqrt{n-1}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Etape 5 : conclusion

En utilisant le théorème des gendarmes et la fait que l'intégrale impropre de e^{-x^2} est absolument convergente en $+\infty$ car $x^2 e^{-x^2}$ tend vers 0 en $+\infty$, on en déduit :

$$\boxed{\int_{\mathbf{0}}^{+\infty} \boldsymbol{e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}}$$

Soit :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}}$$

<u>Remarque</u> :

Une seconde méthode permet d'obtenir ce résultat plus rapidement en utilisant une intégrale double :

$$J = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$$

Cette intégrale peut être calculée de deux façons, d'abord par une intégrale selon y d'une intégrale selon x :

$$J = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \left(\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{-x^2} dx \right) e^{-y^2} dy = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{-x^2} dx \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} e^{-y^2} dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

Mais elle peut également être calculée par passage en coordonnées polaires :

$$J = \int_{r=0}^{r=+\infty} \left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \right) r\, e^{-r^2} dr = 2\pi \left[\frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = \pi$$

D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$