# *Applications des nombres complexes*

## I Rappels : Définition et forme algébrique

Rappelons la définition mathématique précise de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes et des opérations d'addition et de multiplication associées, abordée dans le fichier « Construction des nombres complexes » :

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x\,,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,\}$$

Addition :

$$(x\,,y) + (x'\,,y') = (x + x', y + y')$$

Multiplication :

$$(x\,,y) \times (x'\,,y') = (x\,x' - y\,y'\,, x\,y' + yx')$$

En notant $\widetilde{\mathbb{R}} = \{(x\,,0) : x \in \mathbb{R}\,\}$ , $\widetilde{\mathbb{R}}$, muni des opérations d'addition et de multiplication précédentes sur les couples , est un corps commutatif isomorphe au corps des réels $\mathbb{R}$

$\mathbb{C}$ muni de ses opérations d'addition et de multiplication est alors le plus petit corps commutatif contenant $\mathbb{R}$ et un élément $i = (0\,,1)$ dont le carré est le couple $(-1\,,0)$

Pour tout nombre complexe $z = (x\,,y)$ on a :

$$z = (x\,,y) = (x\,,0) + \ (0\,,1) \times \ (y\,,0)$$

On convient de procéder à des abus d'écriture en confondant un couple $(x\,,0)$ de $\widetilde{\mathbb{R}}$ avec le réel $x$ qui lui est associé par l'isomorphisme. On a alors :

$$z = x + i\,y$$

Cette forme est appelée **forme algébrique** du nombre complexe.

$x$ noté $Re(z)$ est appelé **partie réelle** de $z$ et $y$ noté $Im(z)$ **partie imaginaire.**

On décrit alors $\mathbb{C}$ simplement sous la forme :

$$\boxed{\mathbb{C} = \left\{\boldsymbol{x + i\,y} \ : \ (\boldsymbol{x}\,,\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}\right\}}$$

La définition des opérations d'addition et de multiplication se réécrit alors sous la forme simplifiée :

$$\boxed{\begin{array}{c}(\boldsymbol{x + i\,y}) + (\boldsymbol{x' + i\,y'}) = (\boldsymbol{x + x'}) + \boldsymbol{i}\,(\boldsymbol{y + y'}) \\ (\boldsymbol{x + i\,y}) \times (\boldsymbol{x' + i\,y'}) = (\boldsymbol{x\,x' - y\,y'}) + \boldsymbol{i}\,(\boldsymbol{x\,y' + yx'})\end{array}}$$

On la retrouve facilement en appliquant à $i$ les mêmes règles opératoires (commutativité, associativité, distributivité) que pour un nombre réel et en considérant que :

$$\boldsymbol{i^2 = -1}$$

## II Plan complexe – affixe d'un point – affixe d'un vecteur

Tout nombre complexe étant un couple $(x\,,y)$ de réels, il peut être le couple de coordonnées d'un point d'un plan muni d'un repère orthonormé $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$. Un tel plan est alors qualifié de **plan complexe,** et le nombre complexe $z$ associé à un point $M$ est qualifié d'**affixe** de ce point.

Tout vecteur du plan précédent ayant également un couple de coordonnées dans la base orthonormée de ce plan, le nombre complexe formé par ce couple est appelé également affixe de ce vecteur.

Si on note $z(\vec{u})$ , $z(\vec{v})$ et $z(\vec{u}+\vec{v})$ les affixes respectives de $\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{u}+\vec{v}$, on a :

$$\boldsymbol{z(\vec{u}+\vec{v}) = z(\vec{u}) + z(\vec{v})}$$

De même si $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\boldsymbol{z(\alpha\,\vec{u}) = \alpha\, z(\vec{u})}$$

En d'autres termes, l'application du $\mathbb{R}$ espace vectoriel formé par les vecteurs du plan dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{C}$ : $\vec{u} \to z(\vec{u})$ est linéaire :

## III Conjugué d'un nombre complexe

Etant donné un nombre complexe $= x + i\,y$ , on appelle conjugué de ce nombre, le nombre :

$$\boldsymbol{\bar{z} = x - i\,y}$$

Si $M$ est un point d'affixe $z$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$, alors le point $M'$ d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique du point $M$ par rapport à l'axe $(O\,,\vec{u}\,)$

Propriétés du conjugué :

En notant $z = x + i\,y$ et $z' = x' + i\,y'$

1) Somme

$$\boldsymbol{\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}}$$

Preuve :

$\overline{\mathrm{z} + \mathrm{z}'} = \overline{(x + x') + i\,(y + y')} = (x + x') - i\,(y + y') = (x - i\,y) + (x' - i\,y') = \overline{\mathrm{z}} + \overline{\mathrm{z}'}$

2) Opposé

$$\boldsymbol{\overline{-z} = -\overline{z}}$$

Preuve :

$\overline{-\mathrm{z}} = \overline{-x - i\,y} = -x + i\,y = -(x - i\,y) = -\overline{\mathrm{z}}$

3) Différence

$$\boldsymbol{\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}}$$

Preuve :

Il suffit d'appliquer les deux propriétés précédentes

4) Produit

$$\boldsymbol{\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}}$$

Preuve :

$\overline{\mathrm{z} \times \mathrm{z}'} = \overline{(x\,x' - y\,y') + i\,(x\,y' + y\,x')} = (x\,x' - y\,y') - i\,(x\,y' + y\,x')$

$\overline{z} \times \overline{z'} = \overline{(x + i\,y)}\;\overline{(x' + i\,y')} = (x - i\,y)(x' - i\,y') = (x\,x' - y\,y') - i\,(x\,y' + y\,x')$

Les deux quantités sont bien égales.

5) Inverse pour $\mathrm{z} \neq 0$

$$\boldsymbol{\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}}$$

Preuve :

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{x + i\,y}\right)} = \overline{\left(\frac{x - i\,y}{(x + i\,y)(x - i\,y)}\right)} = \overline{\left(\frac{x - i\,y}{x^2 + y^2}\right)} = \overline{\left(\frac{x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{y}{x^2 + y^2}\right)} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{x - i\,y} = \frac{x + i\,y}{(x - i\,y)(x + i\,y)} = \frac{x + i\,y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Les deux quantités sont bien égales.

6) <u>quotient pour $z' \neq 0$</u>

$$\overline{\left(\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z'}}\right)} = \frac{\overline{\boldsymbol{z}}}{\overline{\boldsymbol{z'}}}$$

<u>Preuve :</u>

Il suffit d'appliquer les deux propriétés précédentes :

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

<u>Cas particulier du produit ou du quotient par un nombre réel $\alpha \neq 0$ :</u>

$$\overline{\alpha \times \boldsymbol{z}} = \alpha \times \overline{\boldsymbol{z}}$$

$$\overline{\left(\frac{\boldsymbol{z}}{\alpha}\right)} = \frac{\overline{\boldsymbol{z}}}{\alpha}$$

<u>Preuves :</u>

Elles découlent immédiatement du fait que le conjugué d'un nombre réel est égal à ce même nombre.

**<u>Produit d'un nombre complexe par son conjugué</u>** :

$$\boldsymbol{z\,\overline{z} = (x + i\,y)\,(x - i\,y) = x^2 + y^2}$$

Cette quantité est le carré de la distance du point $M$ d'affixe $z$ à l'origine du repère du plan complexe.

Rappelant que pour un point $M$ situé à l'abscisse $x$ du premier axe du repère, la distance $OM$ est la valeur absolue de $x$ notée $|x|$, par extension, on convient de noter :

$$\boldsymbol{|z| = |x + i\,y| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Et on qualifie cette quantité de **module** de $\boldsymbol{z}$

On a alors :

$$\boldsymbol{z\,\overline{z} = |z|^2}$$

Cela amène à définir une autre forme pour un nombre complexe, la forme trigonométrique, prélude à la forme exponentielle.

**Somme et différence d'un nombre complexe et de son conjugué** :

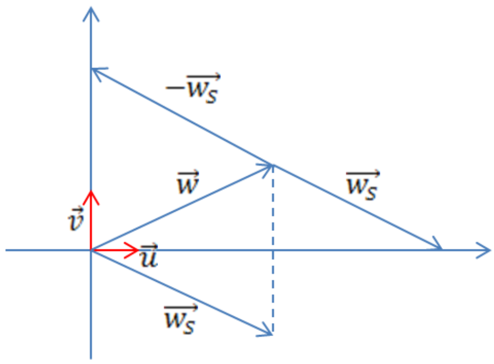
$$\boldsymbol{z + \overline{z} = (x + i\,y) + (x - i\,y) = 2\,x = 2\,Re(z)}$$

$$\boldsymbol{z - \overline{z} = (x + i\,y) - (x - i\,y) = 2\,i\,y = 2\,i\,Im(z)}$$

Cette relation a une traduction géométrique simple. Si $\vec{w}$ est le vecteur du plan complexe d'affixe $z$, alors le vecteur d'affixe $\overline{z}$ est le vecteur $\overrightarrow{w_S}$ symétrique orthogonal par rapport au premier vecteur de base $\vec{u}$.

$z + \overline{z}$ est l'affixe du vecteur $\vec{w} + \overrightarrow{w_S}$ qui est colinéaire au vecteur $\vec{u}$

$z - \overline{z}$ est l'affixe du vecteur $\vec{w} - \overrightarrow{w_S}$ qui est colinéaire au deuxième vecteur de base $\vec{v}$




## III Forme trigonométrique

Commençons par un point de vue géométrique : Etant donné un nombre complexe non nul $z = x + i\,y$ alors, en le divisant par son module, nous obtenons un nouveau nombre complexe :

$$u = \frac{z}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ce complexe est alors de module 1, en effet :

$$|u|^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

Donc : $|u| = 1$

Le point $N$ d'affixe $u$ est alors situé sur le cercle de centre $O$ et de rayon 1. Il existe donc un réel $\theta$ tel que les coordonnées de $N$ soient $(cos(\theta), sin(\theta))$ et ce réel est unique si on le prend dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Plus précisément, le plan étant orienté par sa base orthonormée, $\theta$ n'est rien d'autre qu'une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{ON})$. Ainsi :

$$u = cos(\theta) + i\, sin(\theta)$$

et donc :

$$\boxed{\boldsymbol{z = |z|\ (cos(\theta) + i\, sin(\theta))}}$$

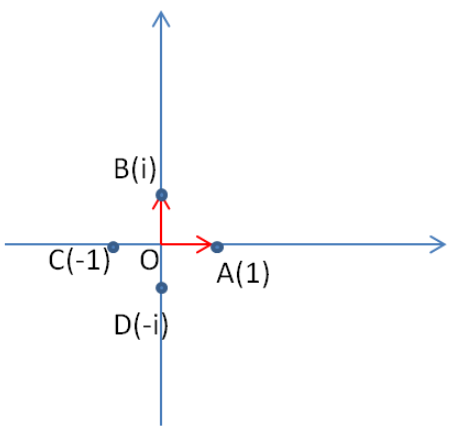
avec :

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{cos(\theta)} = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2 + y^2}}} \\ \boldsymbol{sin(\theta)} = \dfrac{\boldsymbol{y}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2 + y^2}}} \end{cases}}$$

Cette forme est appelée **forme trigonométrique**. Le couple $(|z|, \theta)$ **est le couple de coordonnées polaires du point d'affixe** $\boldsymbol{z}$**.** $\theta$ est qualifié **d'argument de** $\boldsymbol{z}$ et noté $\boldsymbol{Arg}(\boldsymbol{z})$**.** Il n'est défini qu' à un nombre entier relatif de fois $2\,\pi$ près, on dit modulo $2\,\pi$, ce qui signifie : si $(|z|, \theta)$ est un couple de coordonnées polaires d'un point donné, alors pour tout entier relatif $k$, $(|z|, \theta + 2\,k\,\pi)$ est également un couple de coordonnées polaires de ce point.

Exemples de formes trigonométriques :

La méthode est simple, il suffit de calculer d'abord le module puis de le factoriser, et reconnaître par ses valeurs de cosinus et de sinus, lorsque c'est possible, une valeur remarquable d'angle polaire. Nous avons choisi de prendre la mesure principale d'angle polaire à chaque fois. Bien sur, placer les points correspondants dans le plan complexe permet de reconnaître graphiquement avec plus de facilité les angles polaires.



$1 = 1\,(1 + i\ \times 0) = 1\,(cos(0) + i\,sin(0))$

$i = 1\,(0 + i\ \times 1) = 1\,\left(cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$-1 = 1\,(-1 + i\ \times 0) = 1\,(cos(\pi) + i\,sin(\pi))$

$-i = 1\,(0 + i\ \times (-1)) = 1\,\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$1 + i = \sqrt{2}\,\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$3 -\ i\,\sqrt{3} = 2\,\sqrt{3}\,\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\right) = 2\,\sqrt{3}\,\left(cos\left(\frac{-\,\pi}{6}\right) + i\,sin\left(\frac{-\,\pi}{6}\right)\right)$

$2 + 5\ \ i = \sqrt{29}\,\left(\frac{2}{\sqrt{29}} + i\,\frac{5}{\sqrt{29}}\right) = \sqrt{29}\,(cos(\alpha) + i\,sin(\alpha))$ avec : $\alpha = cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)$

$-2 - 5\ \ i = \sqrt{29}\,\left(\frac{-2}{\sqrt{29}} + i\,\frac{-5}{\sqrt{29}}\right) = \sqrt{29}\,(cos(\alpha) + i\,sin(\alpha))$ avec : $\alpha = cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right) - \pi$

**Unicité de la forme trigonométrique :**

1) Préliminaire :

**Soit $z$ un nombre complexe s'écrivant sous la forme $z = r\,(cos(\theta) + i\,sin(\theta))$ avec $r > 0$ alors $|z| = r$**

Preuve :

$$|r\,(cos(\theta) + i\,sin(\theta))| = |r|\,|cos(\theta) + i\,sin(\theta)| = |r|\,\sqrt{cos^2(\theta) + sin^2(\theta)} = r \times 1 = r$$

2) Unicité

Pour $r > 0$ et $r' > 0$ :

**Si $z = r\,(cos(\theta) + i\,sin(\theta)) = r'\,(cos(\theta') + i\,sin(\theta'))$ alors $r = r'$ et $\exists\ k \in \mathbb{Z} :\ \theta = \theta' +\ 2\,k\,\pi$**

Preuve **:**

Du préliminaire, on déduit : $|z| = r = r'$

Il vient alors : $cos(\theta) = cos(\theta')$ et $sin(\theta) = sin(\theta')$ ce qui prouve le résultat

# IV Forme exponentielle

Préliminaire :

Nous avons établi dans le fichier intitulé « Trigonométrie » les formules dites de duplication.

$$\forall\ (\boldsymbol{\theta}\,,\boldsymbol{\theta}') \in \mathbb{R}^2 :\ \begin{cases} \boldsymbol{cos(\theta+\theta') = cos(\theta)cos(\theta') - sin(\theta)sin(\theta')} \\ \boldsymbol{sin(\theta+\theta') = sin(\theta)cos(\theta') + cos(\theta)sin(\theta')} \end{cases}$$

Considérons alors la fonction de $\mathbb{R}$ **dans** $\mathbb{C}$ **:**

$$\boldsymbol{f(\theta) = cos(\theta) + i\ sin(\theta)}$$

Cette fonction vérifie la propriété :

$$f(\theta+\theta') = cos(\theta+\theta') + i\ \ sin(\theta+\theta')$$
$$= \big(cos(\theta)cos(\theta') - sin(\theta)sin(\theta')\big) + i\ \big(sin(\theta)cos(\theta') + cos(\theta)sin(\theta')\big)$$

$$= \big(cos(\theta) + i\ \ sin(\theta)\big)\ \big(cos(\theta') + i\ \ sin(\theta')\big)$$

Autrement dit :

$$\forall\ (\boldsymbol{\theta}\,,\boldsymbol{\theta}') \in \mathbb{R}^2 :\ \boldsymbol{f(\theta+\theta') = f(\theta) \times f(\theta')}$$

De plus :

$$\boldsymbol{f(0) = 1}$$

On en déduit, en prenant $\theta' = -\theta$ pour la première :

$$\forall\ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R} :\ \boldsymbol{f(-\theta) = \frac{1}{f(\theta)}}$$

Puis en remplaçant $\theta'$ par $-\theta'$ toujours dans la première :

$$\forall\ (\boldsymbol{\theta}\,,\boldsymbol{\theta}') \in \mathbb{R}^2 :\ \boldsymbol{f(\theta-\theta') = \frac{f(\theta)}{f(\theta')}}$$

Ces propriétés sont les mêmes que celles des fonctions exponentielles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ , en particulier, l'exponentielle de référence $x \to e^x$ . C'est pourquoi, on convient de noter la fonction précédente sous la forme dit exponentielle :

$$\boldsymbol{f(\theta) = cos(\theta) + i\ sin(\theta) = e^{i\,\theta}}$$

Tout nombre complexe $z$ peut alors se mettre sous la forme :

$$\boldsymbol{z = |z| \left(cos(\theta) + i\, sin(\theta)\right) = |z|\, e^{i\,\theta}}$$

La forme de droite, directement déduite de la forme trigonométrique, est appelée **forme exponentielle.**

Nous pouvons donc reprendre les propriétés d'unicité énoncées pour la forme trigonométrique sous la forme :

**Soit $z$ un nombre complexe s'écrivant sous la forme $z = \boldsymbol{r}\ e^{i\,\theta}$ avec $\boldsymbol{r} > 0$ alors $|z| = \boldsymbol{r}$**

**Pour $\boldsymbol{r} > 0$ et $\boldsymbol{r'} > 0$ :**

**Si $\boldsymbol{z = r\, e^{i\,\theta} = r'\, e^{i\,\theta'}}$ alors $\boldsymbol{r = r'}$ et $\exists\, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z} :\ \boldsymbol{\theta = \theta' + 2\, k\, \pi}$**

<u>Propriétés du module et de l'argument</u> :

Soit $(z\,, z') \in \mathbb{C}^2$ , et soit $z = r\, e^{i\,\theta}$ et $z' = r'\, e^{i\,\theta'}$ deux formes exponentielles de ces nombres, alors :

$$\boldsymbol{z\, z' = r\, e^{i\,\theta} r' e^{i\,\theta'} = r\, r'\, e^{i\,(\theta+\theta')}}$$

$$\textbf{si } \boldsymbol{z' \neq 0 \ :\ \frac{z}{z'} = \frac{r\, e^{i\,\theta}}{r' e^{i\,\theta'}} = \frac{r}{r'}\ e^{i\,(\theta-\theta')}}$$

On en déduit :

$$\boldsymbol{|z\, z'| = |z\,|\ |\,z'|}$$

$$\textbf{si } \boldsymbol{z' \neq 0 \ :\ \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z\,|}{|\,z'|}}$$

Autrement dit, le module d'un produit est le produit des modules et le module d'un quotient, le quotient des modules.

Et si $z \neq 0$ et $z' \neq 0$ :

$$\boldsymbol{Arg\,(z\, z') = Arg\,(z\,) + Arg\,(\,z')\quad modulo\ 2\pi}$$

$$\boldsymbol{Arg\left(\frac{z}{z'}\right) = Arg\,(z) - Arg\,(z') \quad modulo\ 2\pi}$$

**<u>Inégalité triangulaire</u>** :

$$\boldsymbol{|z + z'| \leq |z| + |z'|}$$

avec l'égalité si et seulement si il existe un réel $k \geq 0$ tel que : $z = k\,z'$ ou $z' = k\,z$

<u>Preuve</u> :

Pour tout réel $t$ on a :

$$|t\,z + z'|^2 = (t\,z + z')\,(\overline{t\,z + z'})$$

$$= |z|^2 t^2 + (z\,\overline{z'} + \bar{z}\,z')\,t + |z'|^2$$

$$= |z|^2 t^2 + 2\,Re(z\,\overline{z'})\,t + |z'|^2$$

Cette expression est donc un trinôme à coefficients réels en la variable $t$ qui est toujours de signe positif ou nul. Son discriminant est donc négatif ou nul. Ainsi :

$$4\left(Re(z\,\overline{z'})\right)^2 - 4\,|z|^2\,|z'|^2 \leq 0$$

Donc :

$$\left(Re(z\,\overline{z'})\right)^2 \leq |z|^2\,|z'|^2$$

Soit :

$$Re(z\,\overline{z'}) \leq |Re(z\,\overline{z'})| \leq |z|\,|z'|$$

D'où :

$$|z|^2 + 2\,Re(z\,\overline{z'}) + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2\,|z|\,|z'| + |z'|^2$$

Soit :

$$|\,z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2$$

En prenant la racine, l'inégalité cherchée en découle.

La condition d'égalité est alors

$$Re(z\,\overline{z'}) = |z|\,|z'|$$

Si $z$ ou $z'$ est nul, l'égalité est triviale, sinon, en passant aux formes exponentielles en posant :

$$z = r\,e^{i\,\theta}\,,\ \ z' = r'\,e^{i\,\theta'}$$

La condition devient :

$$Re\left(r\,r'e^{i\,(\theta-\theta')}\right) = r\,r'$$

Soit :

$$cos(\theta - \theta') = 1$$

$$\exists\, p \in \mathbb{Z} :\ \theta = \theta' + 2\,p\,\pi$$

Donc :

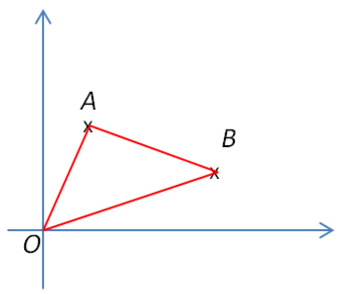
$$z' = \frac{r'}{r}\,z$$

<u>Remarque</u> :

Le nom attribué à la propriété précédente tient au fait suivant :

Si $A$ est un point d'affixe $z$ et $B$ un point d'affixe $z + z'$, alors :

$$|z| = OA\,, |z + z'| = OB\,, |z'| = AB$$




La propriété traduit alors simplement :

$$OB \leq OA + AB$$

avec égalité si et seulement si $A \in [O; B]$, ce qui est précisément l'inégalité triangulaire

## V Formules déduites des formes exponentielles

La forme exponentielle est une forme très féconde pour l'obtention de relations trigonométriques, comme nous allons le voir. Elle permet de retrouver les nombreuses formules de trigonométrie découlant des formules de duplication et d'en découvrir d'autres par une voie très élégante. Ainsi :

### 1) Ajout de $\pi$ dans un sinus et dans un cosinus

Partons d'une banale égalité d'exponentielles

$$e^{i\,(\theta+\pi)} = e^{i\,\theta}\, e^{i\,\pi}$$

$$e^{i\,(\theta+\pi)} = -e^{i\,\theta}$$

$$cos(\theta+\pi) + i\;\; sin(\theta+\pi) = -\big(cos(\theta) + i\;\; sin(\theta)\big)$$

On retrouve les formules bien connues de la trigonométrie, même si elles sont facilement mémorisables d'un point de vue géométrique :

$$\begin{cases} cos(\theta+\pi) = -\,cos(\theta) \\ sin(\theta+\pi) = -\,sin(\theta) \end{cases}$$

### 2) Ajout ou retrait de $\pi/2$ dans un sinus et dans un cosinus

$$e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\,\theta}\, e^{i\,\frac{\pi}{2}}$$

$$e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = i\, e^{i\,\theta}$$

$$cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) + i\;\; sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = i\,\big(cos(\theta) + i\;\; sin(\theta)\big)$$

$$cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) + i\;\; sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -sin(\theta) + i\, cos(\theta)$$

On retrouve les formules bien connues de la trigonométrie, même si elles sont facilement mémorisables d'un point de vue géométrique :

$$\begin{cases} cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\,sin(\theta) \\ sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = cos(\theta) \end{cases}$$

Le retrait de $\pi/2$ se traite de façon analogue

### 3) Formules de duplication

On peut aisément retrouver les formules de duplication en écrivant simplement :

$$e^{i\,(\theta+\theta')} = e^{i\,\theta}\, e^{i\,\theta'}$$

$$cos(\theta+\theta') + i\;\; sin(\theta+\theta') = \big(cos(\theta) + i\;\; sin(\theta)\big)\,\big(cos(\theta') + i\;\; sin(\theta')\big)$$

D'où :

$$cos(\theta + \theta') + i\ \ sin(\theta + \theta')$$

$$= \left(cos(\theta)cos(\theta') - sin(\theta)sin(\theta')\right) + i\left(sin(\theta)cos(\theta') + cos(\theta)sin(\theta')\right)$$

De même :

$$e^{i\,(\theta-\theta')} = e^{i\,\theta}\ e^{-i\,\theta'}$$

$$cos(\theta - \theta') + i\ \ sin(\theta - \theta') = \left(cos(\theta) + i\ \ sin(\theta)\right)\left(cos(\theta') - i\ \ sin(\theta')\right)$$

D’où :

$$cos(\theta - \theta') + i\ \ sin(\theta - \theta')$$

$$= \left(cos(\theta)cos(\theta') + sin(\theta)sin(\theta')\right) + i\left(sin(\theta)cos(\theta') - cos(\theta)sin(\theta')\right)$$

L’identification des parties réelles et imaginaires donnent les formules de duplication

### 4) <u>Formule de Moivre</u>

Par une récurrence évidente, on prouve la formule suivante pour tout entier naturel $n$ :

$$\boxed{\boldsymbol{\left(e^{i\,\theta}\right)^{n} = e^{i\,n\,\theta}}}$$

On en déduit alors aisément qu’elle reste valable pour tout entier relatif $n$ et même tout nombre rationnel.

### 5) <u>Formules d’Euler</u>

Observons que l’on a :

$$e^{i\,\theta} + e^{-\,i\,\theta} = e^{i\,\theta} + \overline{e^{i\,\theta}} = 2\,Re\left(e^{i\,\theta}\right) = 2\,cos(\theta)$$

$$e^{i\,\theta} - e^{-\,i\,\theta} = e^{i\,\theta} - \overline{e^{i\,\theta}} = 2\,i\,Im\left(e^{i\,\theta}\right) = 2\,i\,sin(\theta)$$

On en déduit les formules d’Euler :

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{cos(\theta) = \dfrac{e^{i\,\theta} + e^{-\,i\,\theta}}{2}} \\ \boldsymbol{sin(\theta) = \dfrac{e^{i\,\theta} - e^{-\,i\,\theta}}{2\,i}} \end{cases}}$$

### 6) Factorisation de somme ou de différences de sinus et de cosinus

Partant d'une somme de deux exponentielles complexes, nous allons chercher une factorisation permettant d'utiliser une formule d'Euler, soit de la forme :

$$e^{i\,\theta} + e^{i\,\theta'} = e^{i\,a}\left(e^{i\,b} + e^{-i\,b}\right)$$

Ce problème équivaut au suivant :

$$e^{i\,\theta} + e^{i\,\theta'} = e^{i\,(a+b)} + e^{i\,(a-b)}$$

Pour le résoudre il suffit de trouver un couple$(a\,,b)$ de réels solutions du système :

$$\begin{cases} a + b = \theta \\ a - b = \theta' \end{cases}$$

Or ce système équivaut à :

$$\begin{cases} a = \dfrac{\theta + \theta'}{2} \\ b = \dfrac{\theta - \theta'}{2} \end{cases}$$

On a donc, avec ces valeurs pour $a$ et $b$ :

$$e^{i\,\theta} + e^{i\,\theta'} = 2\,e^{i\,a}\cos(b)$$

$$\big(cos(\theta) + i\ \ sin(\theta)\big) + \ \big(cos(\theta') + i\ \ sin(\theta')\big) = 2\,(\cos(a) + i\sin\,(a))\cos\,(\mathrm{b})$$

$$cos(\theta) + cos(\theta') + i\ \ \big(sin(\theta) + sin(\theta')\big) = 2\ \cos(a)\cos(b) + 2\,i\sin(a)\cos\,(b)$$

D'où, par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\boldsymbol{cos(\theta) + cos(\theta') = 2\ cos\left(\frac{\theta + \theta'}{2}\right) cos\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{sin(\theta) + sin(\theta') = 2\ sin\left(\frac{\theta + \theta'}{2}\right) cos\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right)}$$

En partant de :

$$e^{i\,\theta} - e^{i\,\theta'} = e^{i\,a}\left(e^{i\,b} - e^{-i\,b}\right) = 2\,i\sin(b)\ e^{i\,a}$$

Le lecteur en déduira les formules suivantes :

$$\boldsymbol{cos(\theta) - cos(\theta') = -2\ sin\left(\frac{\theta + \theta'}{2}\right) sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{sin(\theta) - sin(\theta') = 2\ cos\left(\frac{\theta + \theta'}{2}\right) sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right)}$$

et dans le cas où il y a mélange de sinus et cosinus, on pourra toujours par ajout ou retrait de π/2 transformer un sinus en cosinus ou l'inverse. Ainsi :

$$cos(\theta) - sin(\theta') = cos(\theta) + cos\left(\theta' + \frac{\pi}{2}\right) = 2\ cos\left(\frac{\theta + (\theta' + \pi/2)}{2}\right) cos\left(\frac{\theta - (\theta' + \pi/2)}{2}\right)$$

Un cas particulier important s'obtient en remplaçant $\theta$ par 0 et $\theta'$ par $\theta$ :

$$1 + cos(\theta) = 2\ cos\left(\frac{\theta}{2}\right) cos\left(\frac{-\theta}{2}\right)$$

$$1 - cos(\theta) = -2\ sin\left(\frac{\theta}{2}\right) sin\left(\frac{-\theta}{2}\right)$$

Cela donne :

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{1 + cos(\theta) = 2\ cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ \mathbf{1 - cos(\theta) = 2\ sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{cases}}$$

## 7) Factorisation d'une somme d'exponetielles en progression géométrique

Considérons la somme :

$$S_n = 1 + e^{i\,\theta} + \left(e^{i\,\theta}\right)^2 + \cdots + \left(e^{i\,\theta}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\,\theta}\right)^k$$

Cette somme est la somme de $n+1$ termes en progression géométrique de raison $q = e^{i\,\theta}$. Nous avons donc, si $q \neq 1$ soit $\theta \neq 2\,k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S_n = \frac{1 - \left(e^{i\,\theta}\right)^{n+1}}{1 - e^{i\,\theta}}$$

En utilisant la formule de Moivre :

$$S_n = \frac{1 - e^{i\,(n+1)\,\theta}}{1 - e^{i\,\theta}}$$

puis les formules de factorisation vues précédemment :

$$S_n = \frac{e^{i\frac{(n+1)\,\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{(n+1)\,\theta}{2}} - e^{i\frac{(n+1)\,\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}$$

$$S_n = \frac{-2\,i\,sin\left(\frac{(n+1)\,\theta}{2}\right)}{-2\,i\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\frac{n\,\theta}{2}}$$

$$S_n = \frac{sin\left(\frac{(n+1)\,\theta}{2}\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\left(cos\left(\frac{n\,\theta}{2}\right) + i\,sin\left(\frac{n\,\theta}{2}\right)\right)$$

$$\boxed{S_n = \frac{sin\left(\frac{(n+1)\,\theta}{2}\right)\,cos\left(\frac{n\,\theta}{2}\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + i\;\frac{sin\left(\frac{(n+1)\,\theta}{2}\right)\,sin\left(\frac{n\,\theta}{2}\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$$

Notons d'autre part, par la formule de Moivre :

$$S_n = 1 + e^{i\,\theta} + e^{i\,2\,\theta} + \cdots + e^{i\,n\,\theta} = \sum_{k=0}^{n} e^{i\,k\,\theta}$$

Soit en séparant partie réelle et partie imaginaire :

$$S_n = 1 + cos(\theta) + cos(2\,\theta) + \cdots + cos(n\,\theta) + \; i\left(sin(\theta) + sin(2\,\theta) + \cdots + sin(n\,\theta)\right)$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires de cette expression et de celle encadrée précédemment, il vient :

$$\boxed{\begin{gathered}\boldsymbol{1 + cos(\theta) + cos(2\,\theta) + \cdots + cos(n\,\theta) = \frac{sin\left(\frac{(n+1)\,\theta}{2}\right)\,cos\left(\frac{n\,\theta}{2}\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}\\ \boldsymbol{sin(\theta) + sin(2\,\theta) + \cdots + sin(n\,\theta) = \frac{sin\left(\frac{(n+1)\,\theta}{2}\right)\,sin\left(\frac{n\,\theta}{2}\right)}{sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}\end{gathered}}$$

Ces formules ont une grande portée notamment dans la théorie des fonctions périodiques, décomposables en séries de Fourier.

## VI Factorisation des polynômes du second degré

Soit un polynôme de la variable complexe $z$ à coefficients complexes et de degré 2 :

$$P(z) = a\,z^2 + b\,z + c$$

$a$ étant non nul, nous pouvons reprendre le processus de factorisation utilisé pour un polynôme de la variable réelle à coefficients réels :

$$P(z) = a\,\left(z^2 + \frac{b}{a}\,z + \frac{c}{a}\right)$$

$$P(z) = a\,\left(\left(z + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2\,a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

$$P(z) = a\,\left(\left(z + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}\right)$$

Soit en posant et en appelant discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c$$

$$P(z) = a\,\left(\left(z + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\,a^2}\right)$$

Or dans $\mathbb{C}$ , pour tout nombre complexe $\Delta$, il existe au moins un nombre complexe que nous noterons $\delta$ tel que :

$$\Delta = \delta^2$$

Il suffit pour s'en convaincre de mettre $\Delta$ sous forme exponentielle $e^{i\,\alpha}$ , le nombre $\delta = \sqrt{r}\,e^{i\,\alpha/2}$ convient.

On en déduit :

$$P(z) = a\,\left(\left(z + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2\,a}\right)^2\right)$$

$$P(z) = a\,\left(z + \frac{b}{2\,a} + \frac{\delta}{2\,a}\right)\left(z + \frac{b}{2\,a} - \frac{\delta}{2\,a}\right)$$

Le polynôme se factorise donc sous la forme :

$$\boldsymbol{P(z) = a\ (z - z_1)\,(z - z_2)}$$

Avec :

$$\boldsymbol{z_1 = \frac{-b - \delta}{2\,a}}$$

$$\boldsymbol{z_2 = \frac{-b + \delta}{2\,a}}$$

A noter que $\delta$ est une sorte de racine de $\Delta$ mais il vaut mieux éviter de la noter $\sqrt{\Delta}$ car la racine d'un nombre complexe n'est pas proprement définie. Il n'est qu'à penser à $-1$ qui est le carré à la fois de $-\,i$ et de $i$

Exemples de détermination de $\delta$ dans des cas simples :

$\Delta = -2 = \left(i\,\sqrt{2}\right)^{\,2}; \quad \delta = i\,\sqrt{2}$

$\Delta = -3\,i = 3\,e^{-i\frac{\pi}{2}} = \left(\sqrt{3}\ \ e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2 \ ; \quad \delta = \sqrt{3}\ \ e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\,\frac{\sqrt{6}}{2}$

## VII Application des formes exponentielles au calcul de primitives des polynômes trigonométriques

Un polynôme trigonométrique est une fonction de la forme :

$$f(x) = P(\cos(x)) + Q(\sin(x))$$

où $P$ et $Q$ sont deux polynômes de degré quelconque.

Ainsi pour : $P(t) = t^2$ et $(t) = t^3 - 2\,t + 3$ , la fonction est :

$$f(x) = cos^2(x) + sin^3(x) - 2\,sin(x) + 3$$

La méthode pour calculer une primitive d'un polynôme trigonométrique consiste à linéariser les puissances des cosinus et sinus à l'aide des formules d'Euler.

### 1) Linéarisation de $cos^2(x)$

On parle de la formule d'Euler et on la développe :

$$cos^2(x) = \left(\frac{e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{2}\right)^2 = \frac{\left(e^{i\,x}\right)^2 + 2e^{i\,x}\,e^{-i\,x} + \left(e^{-i\,x}\right)^2}{4}$$

On applique la formule de Moivre :

$$cos^2(x) = \frac{1}{4}\left(e^{i\,2\,x} + e^{-i\,2\,x} + 2\right)$$

Et à nouveau la formule d'Euler :

$$cos^2(x) = \frac{1}{4}(2\cos(2\,x) + 2)$$

Finalement :

$$\boxed{\boldsymbol{cos^2(x) = \frac{1}{2}\cos(2\,x) + \frac{1}{2}}}$$

Une primitive s'en déduit :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sin(2\,x) + \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\sin(2\,x) + \frac{1}{2}x$$

2) **Linéarisation de $sin^2(x)$**

$$sin^2(x) = \left(\frac{e^{i\,x} - e^{-i\,x}}{2\,i}\right)^2 = \frac{\left(e^{i\,x}\right)^2 - 2e^{i\,x}\,e^{-i\,x} + \left(e^{-i\,x}\right)^2}{-\,4}$$

$$sin^2(x) = \frac{-1}{4}\left(e^{i\,2\,x} + e^{-i\,2\,x} - 2\right)$$

$$sin^2(x) = \frac{-1}{4}(2\cos(2\,x) - 2)$$

$$\boxed{\boldsymbol{sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}co\,s(2\,x)}}$$

3) **Linéarisation de $cos^3(x)$ et $sin^3(x)$**

$$cos^3(x) = \left(\frac{e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{2}\right)^3 = \frac{\left(e^{i\,x}\right)^3 + 3\left(e^{i\,x}\right)^2 e^{-i\,x} + 3\,e^{i\,x}\left(e^{-i\,x}\right)^2 + \left(e^{-i\,x}\right)^3}{8}$$

$$cos^3(x) = \frac{1}{8}\left(e^{i\,3\,x} + e^{-i\,3\,x} + 3\,e^{i\,x} + 3\,e^{-i\,x}\right)$$

$$cos^3(x) = \frac{1}{8}(2\,cos(3\,x) + 3\ \times 2\,cos(x))$$

$$\boxed{\boldsymbol{cos^3(x) = \frac{1}{4}\,cos(3\,x) + \frac{3}{4}\,cos(x)}}$$

$$sin^3(x) = \left(\frac{e^{i\,x} - e^{-i\,x}}{2\,i}\right)^3 = \frac{\left(e^{i\,x}\right)^3 - 3\left(e^{i\,x}\right)^2 e^{-i\,x} + 3\,e^{i\,x}\left(e^{-i\,x}\right)^2 - \left(e^{-i\,x}\right)^3}{-8\,i}$$

$$sin^3(x) = \frac{1}{-8\,i}\left(e^{i\,3\,x} - e^{-i\,3\,x} - 3\,e^{i\,x} + 3\,e^{-i\,x}\right)$$

$$sin^3(x) = \frac{1}{-8\,i}(2\,i\sin(3\,x) - 3\ \times 2\,i\,sin(x))$$

$$\boxed{\boldsymbol{sin^3(x) = -\frac{1}{4}\,sin(3\,x) + \frac{3}{4}\,sin(x)}}$$

Le processus général consiste à développer $cos^n(x)$ et $sin^n(x)$ à l'aide du binôme de Newton.

## VIII Transformations du plan décrites par une fonction complexe

Un certain nombre de transformations du plan, comme les rotations, les homothéties et les similitudes directes peuvent être décrites très facilement à l'aide d'une transformation simple sur les affixes des points du plan. Dans toute l a suite, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$

### 1) Translation de vecteur $\vec{b}$ d'affixe $b$

C'est une application du plan telle que tout point $M$ d'affixe $z$ ait pour image le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{OM'}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} + \vec{\boldsymbol{b}}}$$

La relation aux affixes s'en déduit :

$$\boxed{\boldsymbol{z' = z + b}}$$

La fonction définie par $f(z) = z + b$ est appelée fonction complexe associée. Elle décrit de façon plus concise et plus pratique la transformation.

Réciproquement :

**Toute fonction complexe de la forme : $f(z) = z + b$ est la fonction complexe associée à une translation de vecteur $\vec{b}$ d'affixe $b$**

## 2) Homothétie de centre $O$ et de rapport $k$

C'est une application du plan telle que tout point $M$ d'affixe $z$ ait pour image le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}}$$

La relation aux affixes s'en déduit :

$$\boxed{z' = k\,z}$$

La fonction complexe associée est définie par $f(z) = k\,z$.

Exemples :

a) $f(z) = -3\ z$ est la fonction complexe associée à l'homothétie de centre $O$ et de rapport $-3$
b) $f(z) = i\ z$ n'est pas associée à une homothétie mais à une rotation comme nous allons le voir plus loin.

## 3) Homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$

C'est une application du plan telle que tout point $M$ d'affixe $z$ ait pour image le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}}$$

En notant $\omega$ l'affixe de , la relation aux affixes s'en déduit :

$$\boxed{(z' - \omega) = k\,(z - \omega)}$$

Notons qu'en développant, nous avons :

$$z' = k\,z + \omega - k\,\omega$$

Soit en posant : $a = k$ et $b = \omega - k\,\omega$ :

$$z' = a\,z + b$$

La fonction complexe associée est donc de la forme : $f(z) = a\,z + b$

Réciproquement :

**La transformation du plan associée à une fonction complexe de la forme $f(z) = a\,z + b$ où $a$ est un nombre réel différent de 1, est une homothétie de centre l'unique point fixe $\Omega$ de la transformation et de rapport a**.

Preuve :

Déterminons d'abord l'affixe $\omega$ du point fixe. Elle est solution du problème :

$$f(z) = z$$

$$a\,z + b = z$$

$$b = z - a\,z$$

$$b = z\,(1 - a)$$

Cette équation en $z$ a pour solution unique :

$$\omega = \frac{b}{1 - a}$$

En notant $z'$ l'image de $z$ par $f$, nous avons :

$$z' = a\,z + b$$

Sachant :

$$\omega = a\,\omega + b$$

On en déduit par soustraction membre à membre :

$$z' - \omega = a\,(z - \omega)$$

Ce qui prouve la propriété.

### 4) Rotation de centre $O$ et d'angle $\alpha$

C'est une application du plan telle que tout point $M$ d'affixe $z$ ait pour image le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que :

$$\left(\overrightarrow{\boldsymbol{O\,M}},\overrightarrow{\boldsymbol{O\,M'}}\right) = \boldsymbol{\alpha} \qquad \boldsymbol{O\,M' = O\,M}$$

En notant $\omega$ l'affixe de  , la relation aux affixes s'en déduit :

$$\boldsymbol{z' = e^{i\,\alpha}\,z}$$

La fonction complexe associée est donc de la forme : $f(z) = a\,z$ avec $a = e^{i\,\alpha}$

## 5) Rotation de centre $\boldsymbol{\Omega}$ et d'angle $\boldsymbol{\alpha}$

C'est une application du plan telle que tout point $M$ d'affixe $z$ ait pour image le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que :

$$\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega\,M}},\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega\,M'}}\right) = \boldsymbol{\alpha} \qquad \boldsymbol{\Omega\,M' = \Omega\,M}$$

En notant $\omega$ l'affixe de  , la relation aux affixes s'en déduit :

$$\boldsymbol{(z' - \omega) = e^{i\,\alpha}\,(z - \omega)}$$

Notons qu'en développant, nous avons :

$$z' = e^{i\,\alpha}\,z + \omega - k\,\omega$$

Soit en posant : $a = e^{i\,\alpha}$ et $b = \omega - k\,\omega$ :

$$z' = a\,z + b$$

La fonction complexe associée est donc de la forme : $f(z) = a\,z + b$

Réciproquement :

**La transformation du plan associée à une fonction complexe de la forme $\boldsymbol{f(z) = a\,z + b}$ où $\boldsymbol{a}$ est un nombre réel différent de 1 de la forme $\boldsymbol{e^{i\,\alpha}}$ donc de module 1, est une rotation de centre l'unique point fixe $\boldsymbol{\Omega}$ de la transformation et d'angle $\boldsymbol{\alpha}$.**

Preuve :

L'affixe $\omega$ du point fixe se détermine comme précédemment :

$$\omega = \frac{b}{1 - a}$$

En notant $z'$ l'image de $z$ par $f$, nous avons :

$$z' = a\,z + b$$

Sachant :

$$\omega = a\,\omega + b$$

On en déduit par soustraction membre à membre :

$$z' - \omega = e^{i\,\alpha}\,(z - \omega)$$

Ce qui prouve la propriété.

6) **<u>Similitude de centre , d'angle $\alpha$ et de rapport k</u>**

C'est une application du plan telle que tout point $M$ d'affixe $z$ ait pour image le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega\,M}},\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega\,M'}}\right) = \boldsymbol{\alpha} \qquad \boldsymbol{\Omega\,M' = k\,\Omega\,M}}$$

En notant $\omega$ l'affixe de , la relation aux affixes s'en déduit :

$$\boxed{(\boldsymbol{z' - \omega}) = \boldsymbol{k\,e^{i\,\alpha}\,(z - \omega)}}$$

Notons qu'en développant, nous avons :

$$z' = k\,e^{i\,\alpha}\,z + \omega - k\,e^{i\,\alpha}\,\omega$$

Soit en posant : $a = k\,e^{i\,\alpha}$ et $b = \omega - k\,e^{i\,\alpha}\,\omega$ :

$$z' = a\,z + b$$

La fonction complexe associée est donc de la forme : $f(z) = a\,z + b$

<u>Réciproquement</u> :

**La transformation du plan associée à une fonction complexe de la forme $\boldsymbol{f(z) = a\,z + b}$ où $\boldsymbol{a}$ est un nombre complexe quelconque différent de 1, est une similitude de centre l'unique point fixe $\boldsymbol{\Omega}$ de la transformation, d'angle $\boldsymbol{\alpha}$ et de rapport le module $\boldsymbol{k}$ de $\boldsymbol{a}$**

<u>Preuve</u> :

L'affixe $\omega$ du point fixe se détermine comme précédemment :

$$\omega = \frac{b}{1 - a}$$

En notant $z'$ l'image de $z$ par $f$, nous avons :

$$z' = a\,z + b$$

Sachant :

$$\omega = a\,\omega + b$$

On en déduit par soustraction membre à membre :

$$z' - \omega = k\,e^{i\,\alpha}\,(z - \omega)$$

Ce qui prouve la propriété.

Remarques :

A noter, qu'une rotation est une similitude de rapport égal à 1.

En résumé :

| |
|---|
| **Les similitudes du plan sont les transformations associées aux fonctions complexes de la forme $\boldsymbol{f(z) = a\,z + b}$ avec $\boldsymbol{a \neq 1}$ et ls translations du plan, celles associées aux fonctions de la forme** |
| $\boldsymbol{f(z) = z + b}$ |

Exemples :

a) La similitude de centre $\Omega$ d'affixe $= i + 1$ , d'angle $\alpha = \pi/2$ et de rapport $k = 2$ est définie par la fonction complexe :

$$f(z) = z'$$

Tel que :

$$z' - (i+1) = 2\,e^{i\frac{\pi}{2}}\big(z - (i+1)\big)$$

Soit :

$$z' = 2\,i\,z - 2\,i\,(i+1) + (i+1)$$

$$z' = 2\,i\,z + 2 - 2\,i + i + 1$$

Finalement :

$$\boxed{f(z) = 2\,i\,z + 3 - i}$$

b) Inversement, la fonction $f(z) = (1+i)\,z - i$ est la fonction associée à la similitude de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$, d'angle $\alpha$ et de rapport $k$ tels que :

$$\omega = (1+i)\,\omega - i$$

$$\omega = \frac{i}{i} = 1$$

$$k = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = Arg\,(1+i) = Arg\,\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right) = \frac{\pi}{4}$$

Donnons en l'image d'un triangle $A\ B\ C$ avec $A(1-i)$, $B(2+i)$ , $C(i)$ en calculant les images des affixes de ces points :

$$f(1-i) = (1+i)\,(1-i) - \mathrm{i} = 1+1-\mathrm{i} = 2-\mathrm{i}$$

$$f(2+i) = (1+i)(2+i) - \mathrm{i} = 2-1+\mathrm{i}+2\,\mathrm{i}-\mathrm{i} = 1+2\,\mathrm{i}$$

$$f(i\,) = (1+i)\,(i\,) - \mathrm{i} = \mathrm{i}-1-\mathrm{i} = -1$$