Angles

Nous allons nous intéresser au concept d'angle, à partir duquel nous pourrons développer la trigonométrie.

CHAPITRE I : Angle orienté de deux vecteurs

Définition

Soit un plan que l'on a orienté par exemple dans le sens trigonométrique de la face considérée et ($\vec{\imath},\vec{\jmath}$) une base orthonormée directe pour l'orientation de ce plan .

Un couple ($\vec{u},\vec{v}$) est alors qualifié de représentant d'un angle orienté. Plus précisément, l'angle orienté ($\vec{u},\vec{v}$) est constitué de tous les couples ($\overrightarrow{u'},\overrightarrow{v'}$) images du couple ($\vec{u},\vec{v}$) par une rotation vectorielle quelconque.

Mesure principale d'un angle orienté

Formons sur le couple ($\vec{u},\vec{v}$) une base orthonormée directe ($\vec{I},\vec{J}$) en prenant pour $\vec{I}$ l'unique vecteur de norme unité colinéaire et de même sens que $\vec{u}$ à savoir :

$$\vec{I} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\,\vec{u}$$

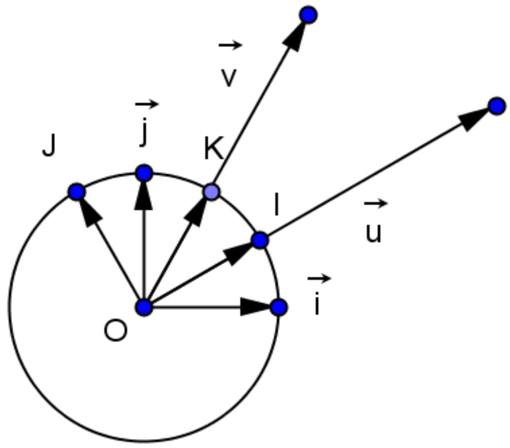
$\vec{J}$ l'unique vecteur tel que $\left(\vec{I}\,,\vec{J}\right)$ soit une base orthonormée de même orientation que la base orthonormée ($\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}$).

Posons :

$$\vec{I} = \overrightarrow{OI}\,, \qquad \vec{J} = \overrightarrow{OJ}$$

Soit $\vec{K}$ l'unique vecteur de norme unité colinéaire et de même sens que $\vec{v}$ à savoir :

$$\vec{K} = \overrightarrow{OK} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$$



Considérons alors le cercle de centre O et de rayon unité OI.

La mesure principale α de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est alors, lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, la mesure de l'arc de cercle IK si $(\vec{u}, \vec{v})$ est de même orientation que $(\vec{I}, \vec{J})$ et l'opposé de cet arc sinon. Elle est alors exprimée en radians (symbole rad).

Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, on pose que cette mesure est nulle et lorsqu'ils sont colinéaires de sens contraires, on pose que cette mesure est égale à π.

Le demi périmètre du cercle unité étant π, nous avons donc :

$$\boxed{\alpha \in \left]-\pi ; \pi\right]}$$

Nous conviendrons de noter par la suite la mesure principale de l'angle orienté formé par un couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ sous la forme :

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v})_P}$$

Propriété de la mesure principale

<u>Relation de Chasles</u> :

Notons :

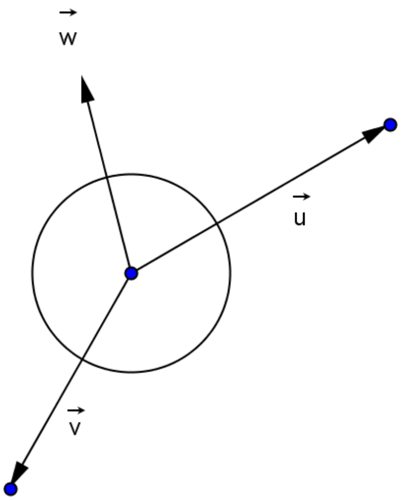
$$\alpha = (\vec{u},\vec{v})_P \;,\quad \beta = (\vec{v},\vec{w})_P \,,\quad \gamma = (\vec{u},\vec{w})_P$$

Nous avons alors :

$$\boxed{\alpha + \beta \in \,]-2\pi;\, 2\pi]}$$

Distinguons alors trois cas :

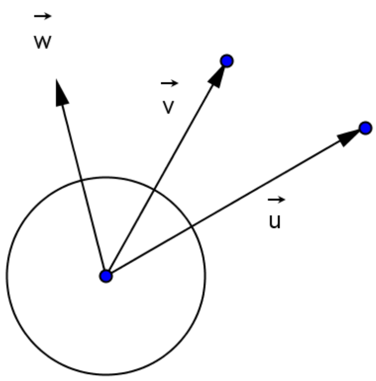
<u>1er cas : $\alpha + \beta \in \,]-2\pi;\, -\pi]$</u>



Nous avons alors :

$$\boxed{\gamma = \alpha + \beta + 2\pi}$$

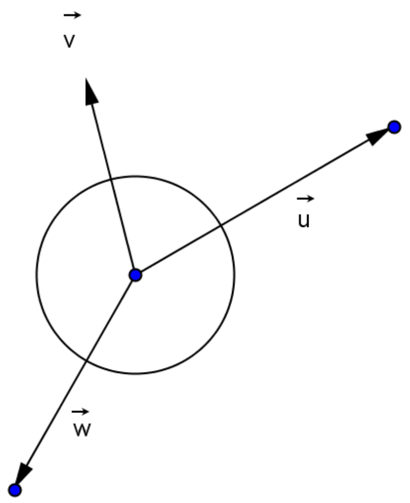
<u>2eme cas : $\alpha + \beta \in \,]-\pi;\, \pi]$</u>



Nous avons alors :

$$\gamma = \alpha + \beta$$

<u>3^{eme} cas : $\alpha + \beta \in]\pi; 2\pi]$</u>



Nous avons alors :

$$\gamma = \alpha + \beta - 2\pi$$

Nous pouvons alors résumer ces trois cas sous la forme unique appelée relation de Chasles :

$$\exists\, k \in \mathbb{Z} : \quad (\vec{u},\vec{v})_P + (\vec{v},\vec{w})_P = (\vec{u},\vec{w})_P + 2k\pi$$

<u>Autres propriétés</u> :

$$\text{si } (\vec{u},\vec{v})_P \neq \pi \quad : \quad (\vec{v},\vec{u})_P = -(\vec{u},\vec{v})_P$$

$$\text{si } (\vec{u},\vec{v})_P = \pi \quad : \quad (\vec{v},\vec{u})_P = \pi$$

$$(-\vec{u},-\vec{v})_P = (\vec{u},\vec{v})_P$$

$$\exists\, k \in \mathbb{Z} : \quad (\vec{u},-\vec{v})_P = (\vec{u},\vec{v})_P + \pi + 2k\pi$$

Preuve :

Il suffit d'appliquer la relation de Chasles :

$$(\vec{u}, -\vec{v})_P = (\vec{u}, \vec{v})_P + (\vec{v}, -\vec{v})_P + +2\,k\,\pi$$

$$= (\vec{u}, \vec{v})_P + \pi + 2\,k\,\pi$$

$$\exists\, k \in \mathbb{Z} : \quad (-\vec{u}, \vec{v})_P = (\vec{u}, \vec{v})_P + \pi + 2\,k\,\pi$$

Preuve analogue à la précédente.

CHAPITRE II : Angle de deux demi droites

Etant donné deux demi droites [O ;A) et [O ;B) issues d'un même point O, nous pouvons définir la mesure principale de l'angle formé par ces deux demi droites comme étant la valeur absolue de la mesure principale du couple de vecteur $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$. Nous la noterons AÔB ou BÔA. Ainsi :

$$A\hat{O}B = \left|(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})_P\right|$$

Nous avons donc :

$$A\hat{O}B \in [0; \pi]$$

Le cercle unité peut être également découpé en 360 degrés au lieu de $2\,\pi$ radians. Dans ce cas, la mesure en degrés vérifie :

$$A\hat{O}B(°) \in [0; 180]$$

Angles remarquables

Angle nul : [O ;A) et [O ;B) sont confondues :

$$A\hat{O}B(°) = 0°$$

Angle plat : O ∈ $[A; B]$

$$\boxed{\hat{AOB}(°) = 180°}$$

Angle droit

$$\boxed{\hat{AOB}(°) = 90°}$$

Angle aigu :

$$\boxed{\hat{AOB}(°) \in][0; 90][}$$

Angle optu

$$\boxed{\hat{AOB}(°) \in]90; 180[}$$