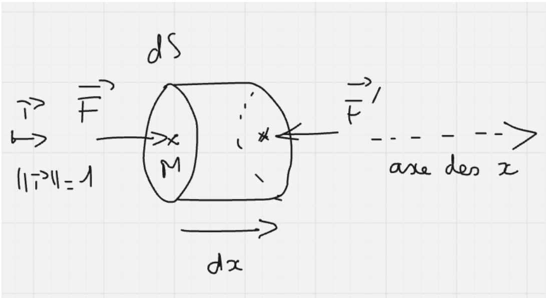
Acoustique – Intensité – Pression - Corrélation

1) Relation entre intensité et pression acoustique

Considérons un petit volume d'air cylindrique de base dS, de hauteur dx, de masse dm, l'onde sonore se déplaçant localement en au point $M(x, y, z)$ dans la direction des x croissants et caractérisée par une pression $P(x, y, z, t) = P_0 + p(x, y, z, t)$, P_0 étant la pression ambiante (en l'absence d'onde) exprimée en Pascal.



Alors, en notant ρ la valeur de la masse volumique de l'air supposée constante dans la région où se propage l'onde, on a :

$$dm = \rho\, dS\, dx$$

Les forces agissant à un instant t dans le sens des x sont :

$$\vec{F} = p(x, y, z, t)\, dS\, \vec{i}\,; \quad \overrightarrow{F'} = -p(x + dx, y, z, t)\, dS\, \vec{i}$$

La deuxième loi de Newton, appliquée au cylindre, s'écrit alors :

$$\vec{F} + \overrightarrow{F'} = m\, \vec{a}$$

Ce qui projeté sur l'axe des x s'écrit, en notant v la vitesse du centre de gravité du cylindre :

$$\big(P_0 + p(x, y, z, t)\big)\, dS - \big(P_0 + p(x + dx, y, z, t)\big)\, dS = dm\, \frac{\partial v}{\partial t}$$

Soit en simplifiant :

$$-\frac{p(x + dx, y, z, t) - p(x, y, z, t)}{dx} = \rho\, \frac{dv}{dt}$$

Ou encore :

$$\boxed{-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\, \frac{\partial v}{\partial t}}$$

Dans le cas particulier d'une onde plane (ou localement plane) sinusoïdale (son pur) on a :

$$p(x, y, z, t) = \hat{p}\, cos(k\, x - \omega\, t)$$

Avec :

$$\hat{p} = amplitude\ de\ l'onde$$

$$k = nombre\ d'onde$$

$$\omega = pulsation\ de\ l'onde$$

reliées aux périodes spatiales et temporelles par :

$$\lambda = \frac{2\,\pi}{k}$$

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega}$$

Et la relation les liant à la célérité c de l'onde :

$$\lambda = c\,T$$

En régime permanent (considéré comme atteint instantanément) , la vitesse est également une fonction sinusoïdale de même forme que p. On a donc :

$$p(x, y, z, t) = \hat{p}\,cos(k\,x - \omega\,t)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \hat{p}\,k\,sin(k\,x - \omega\,t)$$

Donc :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\hat{p}\,k}{\rho}\,sin(k\,x - \omega\,t)$$

Ainsi en intégrant :

$$v(x, y, z, t) = \frac{\hat{p}\,k}{\rho\,\omega}\,cos(k\,x - \omega\,t)$$

La puissance instantanée transmise par la force de pression $\vec{F}$ au cylindre est alors :

$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{v} = p(x, y, z, t)\,dS\,v(x, y, z, t) = \frac{\hat{p}^{\,2} k}{\rho\,\omega}\,cos^2(k\,x - \omega\,t)$$

Sachant :

$$\omega = k\,c$$

La intensité instantanée associée à cette puissance est alors :

$$i(x, y, z, t) = \frac{\delta W}{dS} = \frac{\hat{p}^{\,2}}{\rho\,c}\,cos^2(k\,x - \omega\,t)$$

Rappelons l'identité trigonométrique :

$$cos^2(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,cos(2\,\theta)$$

Donc :

$$\boxed{i(x,y,z,t) = \frac{\hat{p}^{\,2}}{\rho\, c}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, cos(2\,k\,x - 2\,\omega\,t)\right)}$$

La valeur moyenne sur une période T du cosinus étant nulle, la moyenne de cette intensité sur une période, appelée intensité acoustique, est égale au premier terme constant et vaut donc :

$$I = \frac{\hat{p}^{\,2}}{2\,\rho\,c}$$

Par analogie avec une tension sinusoïdale d'amplitude $\widehat{U}$ et de valeur efficace $U = \frac{\widehat{U}}{\sqrt{2}}$, on définit la pression efficace par $P = \frac{\hat{p}}{\sqrt{2}}$. On a alors :

$$\boxed{I = \frac{P^{\,2}}{\rho\,c}}$$

Or dans des conditions normales de température (20°C) et de pression ambiante (1 bar) et à la surface de la Terre, on a $\rho \approx 1{,}2\ kg\ m^{-3}$ et $c \approx 340\ m\ s^{-1}$ donc : $\rho\ c \approx 400$. La formule devient alors :

$$\boxed{I \approx \frac{P^{\,2}}{400}}$$

Ainsi avec l'échelle des décibels :

$$L = 10\ log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 10\ log\left(\frac{P^{\,2}}{4\times 10^{-10}}\right) = 10\ log\left(\left(\frac{P}{2\times 10^{-5}}\right)^2\right) = 20\ log\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

On retient donc deux formules :

$$\boxed{L = 10\ log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 20\ log\left(\frac{P}{P_0}\right)\ ;\ I_0 = 10^{-12}\ Wm^{-2}\ ;\ \ P_0 = 2\times 10^{-5}\ Pa}$$

2 . Superposition d'ondes sonores pures

Deux ondes sonores parvenant en un même point peuvent être corrélées, c'est-à-dire en phase, auquel cas leurs pressions efficaces s'ajoutent, ou bien non corrélées , auquel cas, leurs intensités acoustiques s'ajoutent.

Premier cas : deux sources corrélées de niveaux acoustiques L_1 et L_2

$$P = P_1 + P_2$$

Donc :

$$L = 20\ log\left(\frac{P}{P_0}\right) = 20\ log\left(\frac{P_1}{P_0} + \frac{P_2}{P_0}\right)$$

Or :

$$\frac{P_1}{P_0} = 10^{\frac{L_1}{20}} \;\; ; \;\; \frac{P_2}{P_0} = 10^{\frac{L_2}{20}}$$

Donc :

$$\boxed{L = 20\ log\left(10^{\frac{L_1}{20}} + 10^{\frac{L_2}{20}}\right)}$$

<u>Deuxième cas</u> : deux sources non corrélées de niveaux acoustiques L_1 et L_2

$$I = I_1 + I_2$$

Donc :

$$L = 10\ log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10\ log\left(\frac{I_1}{I_0} + \frac{I_2}{I_0}\right)$$

Or :

$$\frac{I_1}{I_0} = 10^{\frac{L_1}{10}} \;\; ; \;\; \frac{I_2}{I_0} = 10^{\frac{L_2}{10}}$$

Donc :

$$\boxed{L = 10\ log\left(10^{\frac{L_1}{10}} + 10^{\frac{L_2}{10}}\right)}$$

Généralisation à $\boldsymbol{n}$ **sources corrélées :**

$$\boxed{\boldsymbol{L = 20\ log\left(10^{\frac{L_1}{20}} + 10^{\frac{L_2}{20}} + \cdots + 10^{\frac{L_n}{20}}\right)}}$$

Et $\boldsymbol{n}$ **sources non corrélées :**

$$\boxed{\boldsymbol{L = 10\ log\left(10^{\frac{L_1}{10}} + 10^{\frac{L_2}{10}} + \cdots + 10^{\frac{L_n}{10}}\right)}}$$