Acoustique

Nous allons aborder la modélisation des phénomènes acoustiques, c'est-à-dire en rapport avec la propagation du son.

I Equation de propagation

Nous avons établi, dans notre fichier intitulé ondes, la forme générale de l'équation de propagation pour une onde $f(x, y, z, t)$ se propageant en trois dimensions x, y, z, qui est :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)}$$

c est la **célérité** de l'onde ou vitesse de propagation dans le milieu considéré.

Rappelons là également pour une onde à deux dimensions d'espace, x, y, comme une vague, f est alors la hauteur de la vague par rapport au niveau de la mer au repos, ce dernier formant localement un plan $(0, x, y)$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)}$$

Et rappelons là pour une onde à une dimension d'espace x, comme une corde vibrante, f est alors le déplacement algébrique d'un point de la corde à l'abscisse x, perpendiculairement à la corde :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)}$$

Avec le son, nous sommes d'emblée dans les trois dimensions d'espace, c'est donc la première équation qu'il faut considérer, f représente alors la différence de pression générée par le passage de l'onde.

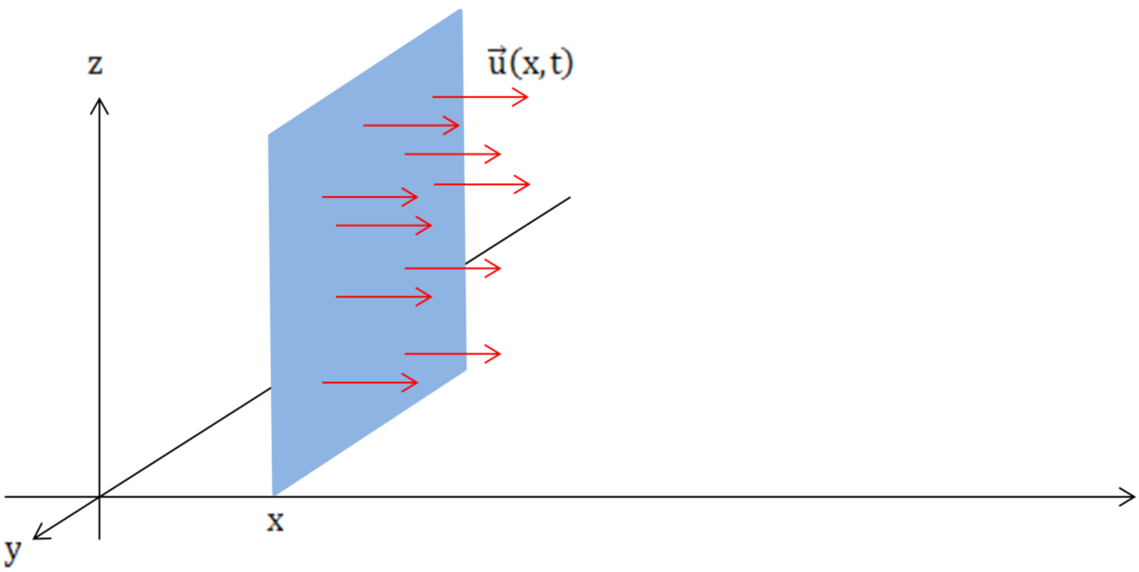
Pour obtenir les caractéristiques de cette équation, il nous faut connaître la vitesse c de propagation du son. Or chacun sait qu'elle est de 340 m/s environ, enfin…., au niveau de la Terre et pour des conditions standards de température et de pression, donc ça ne va pas suffire pour connaître la vitesse à laquelle un avion produit un Bang ! en haute atmosphère parce qu'il dépasse la vitesse du son.

Vous me direz, il n'y a qu'à envoyer l'avion là haut et regarder le compteur de vitesse quand ça fait Bang. Hum ! Pas très pratique et au fait, est ce que ça fait toujours bang ! Bon quoi qu'il en soit, ça s'appellerait une mesure expérimentale, et en sciences, on préfère de loin ce qui peut être évalué sans avoir à faire des mesures et pour cela il suffit de disposer d'un bon modèle mathématique. Voilà pourquoi on se gratte la tête depuis l'antiquité.

Pour obtenir une modélisation de la vitesse, nous allons nous placer dans un cas très particulier, celui d'ondes acoustiques planes car l'équation est relativement facile à obtenir. D'ailleurs, de façon approchée très satisfaisante, c'est ce genre d'ondes qui frappe votre tympan, lorsque vous percevez un son. Pensez à ce que donne l'onde produite par un caillou jeté dans une étendue d'eau, à une distance éloignée. Les fronts d'onde sont des grands cercles et localement ces derniers peuvent être confondus avec des droites perpendiculaires aux rayons.

Supposons donc une onde plane se propageant dans le sens des x croissants, l'axe des x étant par exemple un axe perpendiculaire à la surface de votre tympan. Le déplacement dans un plan perpendiculaire à l'axe des x (plan où tous les points vibrent en phase) est donc une fonction de la forme :

$$\boxed{\vec{u}(x,t) = u(x,t)\ \vec{\imath}}$$



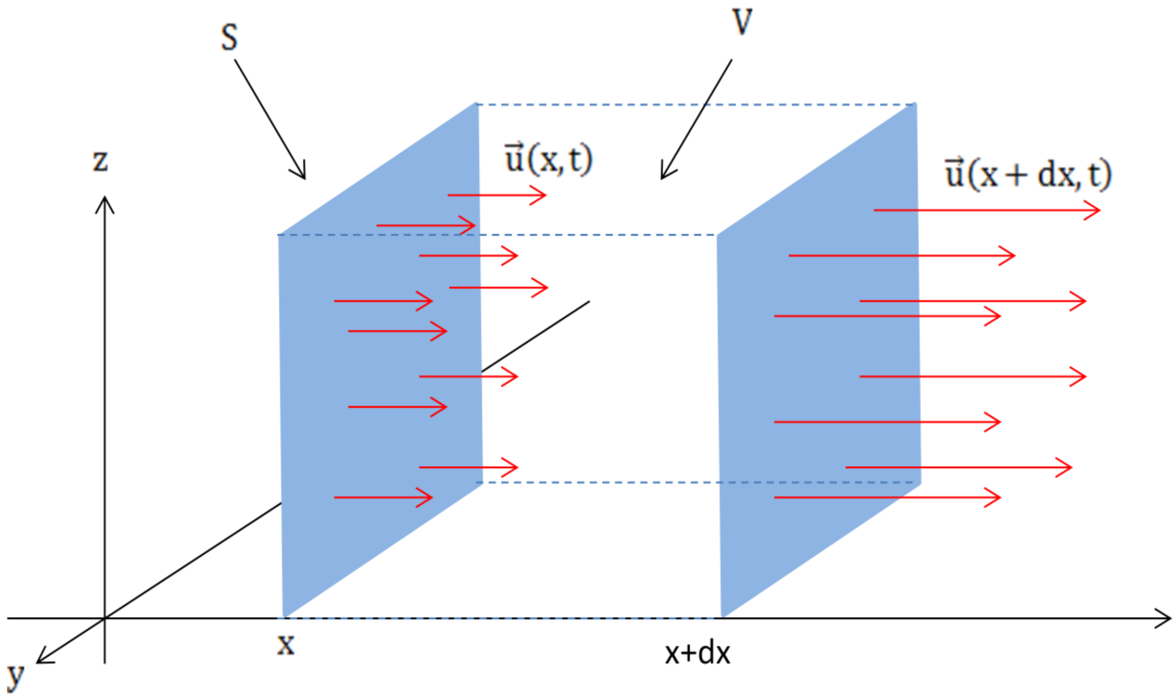
En ce point règne également une pression :

$$\boxed{P(x,t) = p(x,t) + P_0}$$

P_0 est la pression supposée uniforme régnant en tout point de l'espace local en l'absence du passage de l'onde. A la surface de la Terre, la valeur moyenne de P_0 est d'environ 1013 hPa.

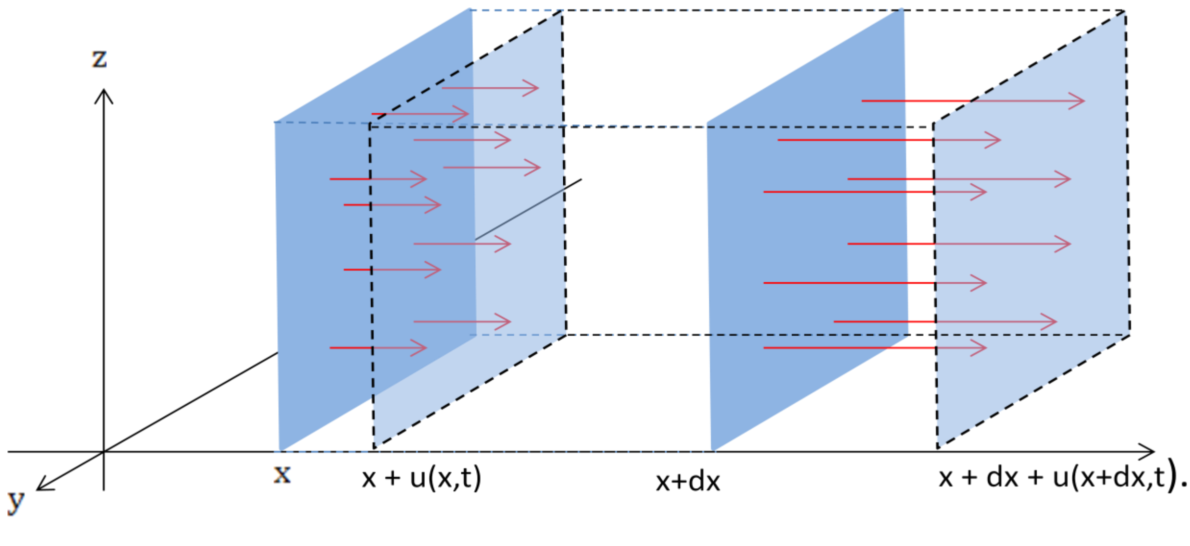
$p(x,t)$ est donc la variation de pression induite par le passage de l'onde.

Partons alors d'un volume V formé d'un pavé droit de base S et de hauteur dx situé entre deux plans d'abscisses x et x + dx.



Lorsque ce volume est au repos, il y règne en tout point la pression P_0.

Le passage de l'onde produit une **perturbation** de ce volume qui se déforme. Les molécules d'air situées dans le plan d'abscisse x se retrouvent dans le plan d'abscisse x + u(x,t) et celles du plan d'abscisse x+dx dans le plan d'abscisse x + dx + u(x+dx,t).



Le volume n'a donc pas varié dans sa base de surface S, mais dans sa hauteur qui est désormais u(x+dx,t) + dx – u(x,t).

Le volume V a donc varié d'une quantité :

$$dV = \big(u(x+dx,t) + \ dx - u(x,t)\big)\, S - S\, dx$$

soit :

$$\boxed{dV = \big(u(x+dx,t) - u(x,t)\big)\ S}$$

Or les points du volume perturbé à l'instant t peuvent être considérés au premier ordre près, comme étant à la pression P(x,t)= p(x,t)+ P_0.

La variation de pression entre le volume perturbé et le volume au repos est donc :

$$\boxed{dP = P(x,t) - P_0 = \ p(x,t)}$$

Or la perturbation du volume V est rapide. Il est raisonnable de penser qu'elle ne laisse pas de temps aux échanges de chaleur avec le milieu extérieur à ce volume. La transformation qui fait passer du volume V à la pression P_0 au volume V + dV à la pression $P_0 + dP$ peut donc être considérée comme **adiabatique** (sans échange de chaleur).

Un détour vers la thermodynamique des gaz parfaits s'impose alors pour montrer comment évaluer le rapport dV/dP.

Il faut rappeler que l'énergie interne U d'un gaz parfait ne dépend que sa température absolue T (en Kelvin) sous forme :

$$U = \ C_v\, T = \ \frac{n\, R}{\gamma - 1}\ T$$

Avec n nombre de moles de gaz dans le volume, R = 8,314 (SI) et :

$$\gamma = \frac{5}{3} \text{ pour les gaz monoatomiques comme le Néon, l'Argon}$$

$$\gamma = \frac{7}{5} \text{ pour les gaz diatomiques comme le diazote ou le dioxygène}$$

Comme l'air est composé pratiquement pour 4/5 de diazote et pour 1/5 de dioxygène, c'est la deuxième valeur de γ qu'il convient de prendre.

Or pour un gaz parfait, nous avons également la relation définissant la température absolue des gaz parfaits :

$$P\,V = n\,R\,T$$

Soit en remplaçant dans U :

$$\boxed{U = \frac{P\,V}{\gamma - 1}}$$

En différenciant cette expression (petites variations de V et de P) il vient :

$$\boxed{dU = \frac{P\,dV + V\,dP}{\gamma - 1}}$$

Mais, comme la transformation est adiabatique, la variation d'énergie interne n'est due qu'au travail des forces pressantes extérieures au volume, qui est :

$$\boxed{\delta W = -P\,dV}$$

Ainsi :

$$\frac{P\,dV + V\,dP}{\gamma - 1} = -P\,dV$$

Soit :

$$P\,dV + V\,dP = -P\,(\gamma - 1)\,dV$$

$$V\,dP == -P\,\gamma\,dV$$

Finalement :

$$\boxed{-\frac{dV/V}{dP} = \frac{1}{\gamma\,P}}$$

La quantité de gauche s'interprète aisément. C'est la diminution relative (en pourcentage) du volume par unité d'augmentation de pression dans une transformation sans échange de chaleur. On la qualifie de coefficient de compressibilité adiabatique (ou isentropique, l'entropie étant notée S) noté χ_S. Nous écrivons donc :

$$\boxed{\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{\gamma\,P}}$$

Revenons alors à nos moutons après ce détour thermodynamique. Pour notre volume V perturbé par l'onde acoustique, nous avons vu que :

$$dV = \big(u(x+dx,t) - u(x,t)\big)\ S$$

$$dP = p(x,t)$$

d'autre part :

$$dV = -\chi_S\ V\ dP$$

Nous en déduisons :

$$\big(u(x+dx,t) - u(x,t)\big)\ S = -\chi_S\ V\ p(x,t)$$

Soit, comte tenu de $V = S\ dx$:

$$\big(u(x+dx,t) - u(x,t)\big) = -\chi_S\ dx\ p(x,t)$$

Donc :

$$\frac{u(x+dx,t) - u(x,t)}{dx} = -\chi_S\ p(x,t)$$

Ce qui se note :

$$\boxed{\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\chi_S\ p(x,t)}$$

Et d'une !!

Nous votons d'emblée sur cette relation que si u et p sont des ondes propagatives sinusoïdales, elles sont déphasées d'un quart de tour ($\pi/2$). Si u est un cosinus, p est un sinus du même argument. On dit qu'elles sont en **quadrature**.

Pour obtenir une équation sur u ou p seulement, il nous faut alors une autre relation. C'est la deuxième loi de Newton qui va la fournir.

Au premier ordre, nous pouvons considérer que tous les points du volume perturbé ont le même déplacement u(x,t). La seconde loi de Newton appliquée à ce volume s'écrit, en notant ρ la masse volumique du milieu de propagation de l'onde :

$$P(x,t)\,S - P(x+dx,t)\,S = \rho\,S\,dx\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Soit :

$$\left(P_0 + p(x,t)\right) - \left(P_0 + p(x+dx,t)\right) = \rho\,dx\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Finalement :

$$-\frac{p(x+dx,t) - p(x,t)}{dx} = \rho\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Ce que l'on écrit :

$$\boxed{-\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = \rho\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer l'expression de p en fonction de u obtenue précédemment et nous obtenons :

$$\frac{1}{\chi_S}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \rho\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Soit finalement :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho\,\chi_S}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}$$

Nous reconnaissons une équation d'onde monodimensionnelle. La célérité des ondes correspondantes est alors caractérisée par :

$$c^2 = \frac{1}{\rho\,\chi_S}$$

Soit

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho\,\chi_S}}}$$

Vous brûlez alors d'envie (je n'en doute pas !) de savoir si vous allez bien retrouver vos 340 m/s pour la vitesse de propagation dans l'air à la surface de la Terre dans des conditions standards.

Alors suspense ! A vos calculettes :

La valeur mesurée de la masse volumique de l'air à mettons 25° sous une pression de 101 325 Pa est :

$$\rho = 1{,}184 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho\, \chi_S}} = \sqrt{\frac{\gamma\, P_0}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{7\ \times 101\,325}{5\ \times 1{,}184}} \approx 346 \text{ m s}^{-1}}$$

C'est conforme à la valeur expérimentale connue. Avouez que c'est beau !!

II Grandeurs complexes et impédance acoustique

Pour étudier les caractéristiques d'un son, on peut le décomposer en une somme de sons sinusoïdaux purs, ce qui en Mathématiques, se traduit par effectuer une transformée de Fourier sur la variable de temps t.

Localement on peut aussi considérer chaque onde comme une superposition d'ondes planes sur les trois directions d'espace x, y, z, ce qui revient à effecteur des transformées de Fourier sur ces trois directions.

Voilà pourquoi la connaissance des caractéristiques d'une onde plane est essentielle.

Or une onde plane est un signal de déplacement ou de pression dans le cas de l'acoustique, où la fonction u par exemple, a une expression de la forme :

$$u(x, t) = U_m\ \cos(k\, x - \omega\, t + \phi)$$

Comme il est d'usage en électricité pour de telles grandeurs sinusoïdales, on peut faire apparaître une valeur efficace définie par :

$$U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Le déplacement devient :

$$\boxed{u(x,t) = U_{eff}\sqrt{2}\ \cos(k\,x - \omega\,t + \phi)}$$

La pression s'en déduit par la relation :

$$-\chi_S\ p(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -k\,U_{eff}\sqrt{2}\ \sin(k\,x - \omega\,t + \phi)$$

Soit :

$$p(x,t) = \frac{k}{\chi_S}\ U_{eff}\sqrt{2}\ \cos\left(k\,x - \omega\,t + \phi - \frac{\pi}{2}\right)$$

p est donc de la forme :

$$\boxed{p(x,t) = P_{eff}\sqrt{2}\ \cos(k\,x - \omega\,t + \psi)}$$

avec :

$$\boxed{P_{eff} = \frac{k}{\chi_S}\ U_{eff}\ \text{ et } \psi = \phi - \frac{\pi}{2}}$$

Variation de pression p et déplacement u sont donc en quadrature de phase.

Si dès lors, nous nous intéressons à la vitesse de déplacement v en un point, nous avons :

$$v(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \omega\ U_{eff}\sqrt{2}\ \sin(k\,x - \omega\,t + \phi)$$

soit :

$$v(x,t) = \omega\ U_{eff}\sqrt{2}\ \cos\left(k\,x - \omega\,t + \phi - \frac{\pi}{2}\right)$$

la vitesse est donc de la forme :

$$\boxed{v(x,t) = V_{eff}\sqrt{2}\ \cos(k\,x - \omega\,t + \phi')}$$

avec :

$$\boxed{\begin{gathered} V_{eff} = \ \omega\ U_{eff} \\ \phi' = \phi - \frac{\pi}{2} \end{gathered}}$$

Tout cela fait des écritures compliquées, nombre de mes lecteurs ont déjà probablement mal au crâne. Alors simplifions les, grâce aux mathématiques et aux merveilleux nombres complexes.

Introduisons pour cela les trois nombres complexes suivants, j étant le nombre complexe tel que $j^2 = -1$:

$$\boxed{\begin{array}{c} U = U_{eff}\, e^{j\,\phi} = U_{eff}\,\cos(\phi) + j\,U_{eff}\,\sin(\phi) \\ V = V_{eff}\, e^{j\,\phi'} = V_{eff}\,\cos(\phi') + j\,V_{eff}\,\sin(\phi') \\ P = P_{eff}\, e^{j\,\phi} = P_{eff}\,\cos(\psi) + j\,P_{eff}\,\sin(\psi) \end{array}}$$

Reprenons alors la relation liant la vitesse v au déplacement u :

$$v(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

$$V_{eff}\sqrt{2}\,\cos(k\,x - \omega\,t + \phi') = k\,U_{eff}\sqrt{2}\,\cos\left(k\,x - \omega\,t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

En dérivant cette relation par rapport au temps t et en simplifiant par ω nous obtenons une relation similaire, mais avec des sinus eu lieu de cosinus :

$$V_{eff}\sqrt{2}\,\sin(k\,x - \omega\,t + \phi') = k\,U_{eff}\sqrt{2}\,\sin\left(k\,x - \omega\,t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

En additionnant la première relation à la seconde multipliée par j, nous obtenons une relation complexe :

$$V_{eff}\sqrt{2}\,e^{j\,(k\,x-\omega\,t+\phi')} = k\,U_{eff}\sqrt{2}\,e^{j\,(k\,x-\omega\,t+\phi+\pi/2)}$$

Soit :

$$V_{eff}\;e^{j\,\phi'}e^{j\,(k\,x-\omega\,t)} = k\,U_{eff}\;e^{j\,(\pi/2)}e^{j\,\phi}\;e^{j\,(k\,x-\omega\,t)}$$

Finalement après simplifications :

$$V_{eff}\;e^{j\,\phi'} = k\,U_{eff}\,e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)}e^{j\,\phi}$$

$$\boxed{V = j\,k\,U}$$

Autrement dit pour résumé :

Si u(x,t) et v(x,t) sont deux signaux sinusoïdaux de la forme :

$$\mathbf{u(x,t) = U_{eff}\,\sqrt{2}\ \cos(k\,x - \omega\,t + \phi)}$$

$$\mathbf{v(x,t) = V_{eff}\,\sqrt{2}\ \cos(k\,x - \omega\,t + \phi')}$$

on leur associe des grandeurs complexes :

$$\mathbf{U = U_{eff}\ e^{j\,\phi}}$$

$$\mathbf{V = V_{eff}\ e^{j\,\phi'}}$$

Si u et v sont liées par une équation différentielle réelle linéaire comme par exemple :

$$\mathbf{v(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}}$$

alors les fonctions complexes associées :

$$\mathbf{\bar{u}(x,t) = U_{eff}\,\sqrt{2}\ e^{j\,(k\,x - \omega\,t + \phi)}}$$

$$\mathbf{\bar{v}(x,t) = V_{eff}\,\sqrt{2}\ e^{j\,(k\,x - \omega\,t + \phi')}}$$

sont solutions de la même équation différentielle.

La dérivation par rapport à la variable temporelle t se traduit alors par une multiplication par $-j\,\omega$ et la dérivation par rapport à x se traduit par une multiplication par j k.

Les relations entre les grandeurs complexes s'en déduisent.

Reprenons alors notre problème d'acoustique pour déterminer les relations entre les grandeurs complexes U, V et P.

Partons des équations différentielles obtenues au chapitre I :

$$\boxed{\begin{gathered} v(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \\ -\chi_S\ p(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \end{gathered}}$$

$$-\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = \rho \ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

En écrivant qu'elles sont satisfaites pour les fonctions complexes associées $\bar{u}(x,t), \bar{v}(x,t), \bar{p}(x,t)$ nous obtenons :

$$V = -j\ \omega\ U$$

$$-\chi_S\ P = j\ k\ U$$

$$-j\ k\ P = \rho\ (j\ \omega)^2\ U$$

Avouez que ces trois dernières relations, qui contiennent toutes les informations de l'onde acoustique, sont bien plus attrayantes que les trois précédentes. Nous allons les exploiter.

En prenant leur module, nous obtenons, les relations entre grandeurs efficaces, c'est-à-dire grosso modo, l'amplitude de vibration pour le déplacement, la vitesse ou la pression :

$$V_{eff} = \omega\ U_{eff}$$

$$\chi_S\ P_{eff} = k\ U_{eff}$$

$$k\ P_{eff} = \rho\ \omega^2\ U_{eff}$$

En faisant le quotient des deux dernières relations, on obtient :

$$\chi_S\ \rho\ \omega^2 = k^2$$

Mais d'autre part, nous avons :

$$\omega = k\ c \quad \text{donc} \quad \omega^2 = k^2\ c^2$$

d'où :

$$\chi_S\ \rho\ c^2 = 1$$

Nous retrouvons la formule déjà établi de la célérité de l'onde :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho\ \chi_S}}$$

Mais nous pouvons également avec les deux premières relations obtenir une relation entre valeurs efficaces de la pression et de la vitesse :

$$P_{eff} = \frac{k}{\omega\, \chi_S}\, V_{eff}$$

or :

$$\frac{k}{\omega\, \chi_S} = \frac{k}{k\, c\, \chi_S} = \frac{\rho\, c^2}{c} = \rho\, c$$

Donc :

$$\boxed{P_{eff} = \rho\, c\, V_{eff}}$$

La quantité $Z = \rho\, c$ représente l'amplitude de la variation de pression nécessaire pour obtenir une vitesse d'amplitude unité. On la qualifie **d'impédance acoustique** (impédance = qui empêche). Plus le milieu a une forte impédance plus il « empêche » l'onde de produire une vitesse de déplacement sous une amplitude de variation de pression donnée.

C'est la même notion en électricité, où la tension joue le rôle de la pression et la vitesse, celui de l'intensité.

III Puissance acoustique

D'un point pratique, ce n'est pas tant la pression qui est intéressante à considérer mais l'effet qu'elle produit sur une surface, c'est-à-dire l'énergie qu'elle transmet.

Intéressons nous donc à une surface unité à l'abscisse x, perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde plane. Le travail de la pression sur cette surface pendant une période T de l'onde est donné par l'intégrale :

$$W = \int_0^T p(x,t) v(x,t) dt$$

Soit :

$$W = \int_0^T P_{eff}\sqrt{2}\,\cos\left(k\,x - \omega\,t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) V_{eff}\sqrt{2}\,\cos\left(k\,x - \omega\,t + \phi - \frac{\pi}{2}\right) dt$$

$$W = P_{eff}\,V_{eff}\int_0^T 2\,\cos\left(k\,x - \omega\,t + \phi - \frac{\pi}{2}\right)\,\cos\left(k\,x - \omega\,t + \phi - \frac{\pi}{2}\right) dt$$

Or les experts que vous êtes de la trigonométrie auront reconnu une formule :

$$2\,\cos(a)\,\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

D'où :

$$W = P_{eff}\,V_{eff}\int_0^T (\cos(2\,k\,x - 2\,\omega\,t + 2\,\phi) + \cos(0))dt$$

Or T est également période du premier cosinus donc son intégrale est nulle, il reste alors :

$$W = P_{eff}\,V_{eff}\int_0^T 1\,dt$$

Soit finalement :

$$\boxed{W = P_{eff}\,V_{eff}\,T}$$

Par définition, on appelle intensité acoustique, la valeur de ce travail divisé par la période. C'est donc la valeur moyenne de l'énergie transférée par unité de surface par l'onde et elle vaut :

$$\boxed{I = \frac{W}{T} = P_{eff}\,V_{eff} = \frac{1}{Z}\,{P_{eff}}^2}$$

Cette intensité est exprimée en Watt par mètre carré ($W\,m^{-2}$)

Voyons alors l'intensité correspondant à la pression la plus faible audible par l'homme ordinaire pour un son se propageant dans l'air dans le domaine de fréquence audible qui s'étend de 20 à 20 000 Hz, qui est $P_{eff} = 2 \times 10^{-5}$ Pa.

Il nous faut pour cela évaluer l'impédance acoustique :

$$Z = \rho c = 1{,}184 \times 346 = 410 \ (S\,I)$$

$$\boxed{I = \frac{1}{Z} P_{eff}{}^{2} = \frac{4 \times 10^{-10}}{410} \approx 10^{-12} W\, m^{-2}}$$

Cette valeur de l’intensité sera prise comme référence pour la définition d’une unité plus commode : le décibel. Rendez vous au prochain fichier intitulé : Acoustique et décibels pour en savoir plus

IV Applications