Concours interne – sujet de physique 2020

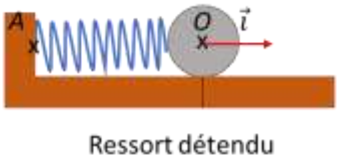
Durée : 3 H

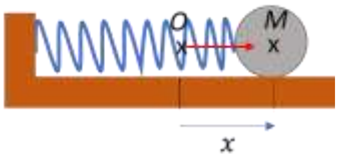
Le sujet comporte deux problèmes indépendants. Dans chaque problème, les questions sont relativement indépendantes. Il est conseillé de faire un brouillon car les réponses se font impérativement dans les encarts de l'énoncé prévus à cet effet. Aucune feuille de brouillon additionnelle ne sera prise en compte et le soin sera également considéré.

Problème 1 : Mécanique (18 pts)

1) Energie potentielle élastique d'un ressort (8 pts)

On considère un ressort relié par une extrémité à un point A d'un support fixe dans le référentiel terrestre et par son autre extrémité à une bille dont le centre M peut se déplacer sur un axe horizontal comme indiqué sur le schéma et est repéré par son abscisse x dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath})$ lié à cet axe, O étant la position du centre de la bille, ressort détendu.





La force exercée par le ressort sur la masse a alors pour expression :

$$\vec{F} = -k\,\overrightarrow{OM} = -k\,x\,\vec{\imath}$$

où k est appelée raideur du ressort.

a) Donner, dans le système international d'unités, l'unité de k (0,5 pt).

k en $N\,m^{-1}$

b) Donner l'expression du travail élémentaire δW de la force exercée par le ressort sur la masse lorsque le point M effectue une translation de vecteur $dx\,\vec{\imath}$ (0,5 pt) :

$\delta W = \vec{F}\cdot dx\ \vec{\imath} = -k\,x\,\vec{\imath}\cdot dx\ \vec{\imath} = -k\,x\,dx$

c) En intégrant l'expression précédente entre une abscisse initiale x_1 et une abscisse finale x_2 du point M, montrer que le travail W de la force exercée par le ressort sur un chemin de

transformation ne dépend que des abscisses initiale et finale de ce chemin et établir la formule de l'énergie potentielle élastique $\boldsymbol{E_{Pel}(x)}$ associée, c'est-à-dire telle que $\boldsymbol{W = E_{Pel}(x_1) - E_{Pel}(x_2) = -\Delta E_{Pel}}$: (2 pts).

$$W = \int_{x_1}^{x_2} -k\,x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\,k\,x^2\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}\,k\,{x_1}^2 - \frac{1}{2}\,k\,{x_2}^2$$

$$E_{Pel}(x) = \frac{1}{2}\,k\,x^2$$

On suppose que la bille de masse m peut se déplacer sans frottements sur l'axe horizontal. On la positionne à un instant pris comme origine à une abscisse x_0 et on la lâche sans vitesse initiale.

d) Faire un bilan des forces agissant sur la masse puis, en appliquant la seconde loi de Newton, établir l'équation différentielle à laquelle obéit l'abscisse $\boldsymbol{x}$ du point $\boldsymbol{M}$ (2 pt).

Force de rappel du ressort : $\vec{F} = -k\,\overrightarrow{OM} = -k\,x\,\vec{\imath}$

Poids de la bille : $\vec{P} = m\,\vec{g}$

Réaction du support : $\vec{R}$ (verticale dirigée vers le haut)

2ème loi de Newton : $\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{\imath}$

$$\begin{cases} \vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{F} = m\,\vec{a} \end{cases}$$

Equation différentielle du mouvement : $m\,\ddot{x} = -k\,x$

De la forme : $\ddot{x} = -\,\omega^2\,x$ avec

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

e) Déterminer pour l'équation différentielle, une solution de la forme $\boldsymbol{x(t) = A\,cos(\omega\,t) + B\,sin(\omega\,t)}$ en précisant les valeurs de $\boldsymbol{A, B, \omega}$ en fonction de $\boldsymbol{x_0, m, k}$ (2 pt)

Solution générale de l'équation différentielle :

$$x(t) = A\,cos(\omega\,t) + B\,sin(\omega\,t)$$

Donc en dérivant :

$$\dot{x}(t) = -A\,\omega\,sin(\omega\,t) + B\,\omega\,cos(\omega\,t)$$

En appliquant les conditions initiales de position et de vitesse :

$$\begin{cases} x(0) = A = x_0 \\ \dot{x}(0) = B\ \omega = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$x(t) = x_0\ cos(\omega\ t)$$

f) En déduire que le mouvement est périodique et préciser sa période et sa fréquence (1 pt).

Le mouvement est périodique de période :

$$T = \frac{2\ \pi}{\omega} = 2\ \pi\ \sqrt{\frac{m}{k}}$$

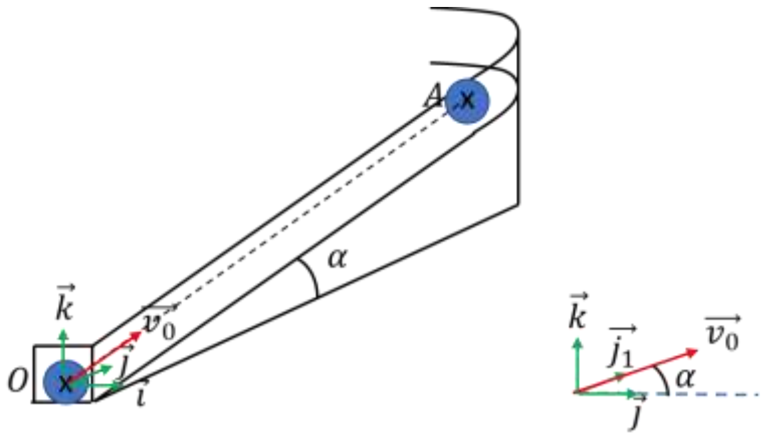
Et de fréquence :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\ \pi}\ \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2) <u>Etude du mouvement d'une bille de flipper à l'ancienne</u>

Un flipper était un jeu très prisé par les piliers de bar. Sa version initiale était totalement mécanique. Le principe était simple. En actionnant une tirette par une poignée en bas et à droite du flipper, on comprimait un ressort, ce qui libérait un passage et permettait à une bille de venir se loger sur un support fixé à l'extrémité supérieure du ressort. En relâchant la poignée de la tirette, le ressort propulsait, par sa décompression, la bille qui était guidée sur une première portion rectiligne puis une seconde portion circulaire pourvu qu'elle ait une vitesse initiale suffisante. On se propose d'analyser le mouvement de la bille dans cette partie guidée.

On munit le référentiel terrestre d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, O étant la position du centre de la bille au moment où cette dernière quitte le ressort avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{J_1}$, $\overrightarrow{J_1}$ étant le vecteur unitaire de même sens que $\overrightarrow{v_0}$ ($v_0 > 0$), $\vec{\jmath}$ dans un plan horizontal tel que l'angle d'espace $\alpha = (\vec{\jmath}, \overrightarrow{J_1})$ soit également l'angle que forme le plan incliné sur lequel roule la bille par rapport au plan horizontal.



On s'intéresse dans un premier temps au mouvement de la bille dans la partie rectiligne du guide et on note A la position la plus haute que puisse atteindre la bille sur cette portion.

a) Exprimer la hauteur h_0 (différence d'altitude) du point A par rapport au point O à partir de $L = OA$ et de α (0,5 pt)

$$h_0 = L\, sin(\alpha)$$

b) Donner en fonction des paramètres de l'énoncé l'expression de l'énergie mécanique (énergie cinétique + énergie potentielle de pesanteur) pour la bille de masse m au point A en prenant le point O pour référence nulle de l'énergie potentielle de pesanteur.(0,5 pt)

$$E_m(A) = \frac{1}{2}\, m\, v_A^2 + m\, g\, L\, sin(\alpha)$$

c) En supposant les frottements négligeables et en appliquant le principe de conservation de l'énergie mécanique, déterminer la valeur minimale de v_0 pour que la bille atteigne le point A (1 pt)

La vitesse minimale correspond à une énergie cinétique nulle en A donc :

$$E_m(A) = m\, g\, L\, sin(\alpha)$$

Or :

$$E_m(0) = \frac{1}{2}\, m\, v_0^2$$

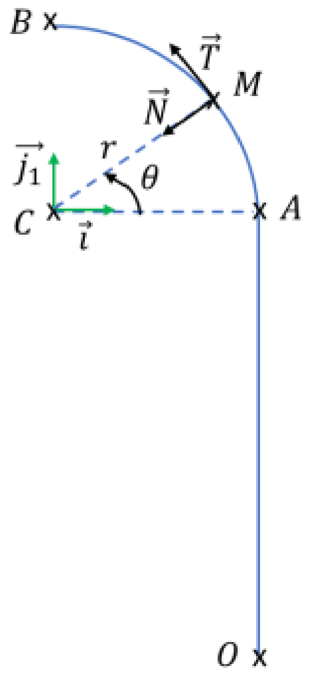
Par conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}\, m\, v_0^2 = m\, g\, L\, sin(\alpha)$$

Soit :

$$v_0 = \sqrt{2\, g\, L\, sin(\alpha)}$$

On s'intéresse maintenant au mouvement de la bille dans la portion circulaire (premier quart de cercle). La position du centre de la bille, qui se situe sur un quart de cercle d'extrémités A et B et de centre C, est décrite dans le repère orthonormé $(C, \vec{\imath}, \vec{J_1})$ par les coordonnées polaires (r, θ) r étant le rayon du cercle. On définit également le repère de Frénet $\left(M, \vec{T}, \vec{N}\right)$, $\vec{T}$ étant le vecteur unitaire tangent au cercle pointant dans le sens du mouvement et $\vec{N}$ le vecteur unitaire pointant vers le centre du cercle.



d) **Etablir les coordonnées de $\overrightarrow{CM}, \vec{T}$ et $\vec{N}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{j_1})$ (1 pt)**

$$\overrightarrow{CM} = r\, cos(\theta)\, \vec{\imath} + r\, sin(\theta)\, \vec{j_1}$$
$$\vec{T} = -\, sin(\theta)\, \vec{\imath} + \, cos(\theta)\, \vec{j_1}$$
$$\vec{N} = -\, cos(\theta)\, \vec{\imath} - \, sin(\theta)\, \vec{j_1}$$

e) **En notant que l'altitude z du point M par rapport au plan horizontal passant par O est $z = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k}$, exprimer z en fonction de L, α, r, θ. (1 pt)**

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$$
$$z = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k} = \overrightarrow{OA} \cdot \vec{k} + \overrightarrow{AC} \cdot \vec{k} + \overrightarrow{CM} \cdot \vec{k}$$
$$= L\, sin(\alpha) + r\, sin(\alpha)\, sin(\theta)$$
$$= sin(\alpha)\, \big(L + r\, sin(\theta)\big)$$

f) **Faire un bilan des forces agissant sur la bille et donner leurs expressions sur les vecteurs unitaires adaptés précités. Pour la réaction du guide, on supposera les frottements négligeables et on décrira cette dernière par une réaction de sol $\overrightarrow{R_S}$ et une réaction de paroi latérale $\overrightarrow{R_n} = R_n \vec{N}$ et on introduira le vecteur unitaire $\vec{K}$ tel que $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{K})$ soit une base orthonormée directe (1 pt)**

Réactions du guide : $\vec{R} = R_s\, \vec{K} + R_n\, \vec{N}$

Poids de la bille : $\vec{P} = m\, \vec{g} = -m\, g\, \vec{k}$

g) **En utilisant des produits scalaires, en déduire les composantes des forces agissant sur la bille dans la base $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{K})$ (1 pt)**

$$\vec{P} = (\vec{P} \cdot \vec{T})\,\vec{T} + (\vec{P} \cdot \vec{N})\,\vec{N} = -m\,g\,cos(\theta)\,sin(\alpha)\,\vec{T} + m\,g\,sin(\theta)\,sin(\alpha)\,\vec{N}$$
$$\vec{R} = R_s\,\vec{K} + R_n\,\vec{N}$$

On note pour simplifier :

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \;\; ; \;\; \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

et on rappelle que le vecteur vitesse et le vecteur accélération ont pour expression dans le repère de Frénet :

$$\vec{v} = v\,\vec{T} = r\,\dot{\theta}\,\vec{T}$$
$$\vec{a} = \dot{v}\,\vec{T} + \frac{v^2}{r}\,\overrightarrow{N} = r\,\ddot{\theta}\,\vec{T} + \frac{v^2}{r}\,\overrightarrow{N}$$

h) En appliquant la seconde loi de Newton et en la projetant dans la base de Frénet, établir le système de deux équations décrivant le mouvement et en déduire une équation différentielle vérifiée par θ (1 pt)

$$\vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{a}$$

En projection dans la base de Frénet :

$$\begin{cases} m\,\dot{v} = -m\,g\,sin(\alpha)\,cos(\theta) \\ m\,\dfrac{v^2}{r} = m\,g\,sin(\alpha)\,sin(\theta) + R_n \end{cases}$$

Equation différentielle sachant $\dot{v} = r\,\ddot{\theta}$:

$$r\,\ddot{\theta} = -g\,sin(\alpha)\,cos(\theta)$$

On admet que la composante R_n de la réaction de paroi a pour expression :

$$R_n = m\,\frac{v^2}{r} - m\,g\,sin(\alpha)\,sin(\theta)$$

i) **En appliquant le principe de conservation de l'énergie mécanique, exprimer v^2 en fonction de $v_0, h_0, g, r, \alpha, \theta$ et en déduire l'expression de R_n en fonction de m et des paramètres précédents (1 pt) :**

Conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,z = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2$$

Avec : $z = \overline{OM} \cdot \vec{k} = \overline{OA} \cdot \vec{k} + \overline{AC} \cdot \vec{k} + \overline{CM} \cdot \vec{k} = h_0 + r\,sin(\alpha)\,sin(\theta)$

Soit :

$$v^2 = v_0^2 - 2\, g\, \big(h_0 + r\, sin(\alpha)\, sin(\theta)\big)$$

Donc :

$$R_n = m\left(\frac{v_0^2 - 2\, g\, h_0}{r} - 3\, g\, sin(\alpha)\, sin(\theta)\right)$$

On suppose que la bille se désolidarise de la paroi dans la portion circulaire.

j) **Déterminer la valeur de $\boldsymbol{\theta}$ pour laquelle cela a lieu, c'est-à-dire lorsque $\boldsymbol{R_n = 0}$ (0,5 pt) :**

$$sin(\theta) = \frac{v_0^2 - 2\, g\, h_0}{3\, g\, r\, sin(\alpha)}$$

k) **En déduire un intervalle dans lequel doit se situer $\boldsymbol{v_0}$ pour que ce dernier évènement ait lieu (1 pt)**

Condition : $0 < sin(\theta) < 1$

$$0 < v_0^2 - 2\, g\, h_0 < 3\, g\, r\, sin(\alpha)$$

$$\sqrt{2\, g\, h_0} < v_0 < \sqrt{2\, g\, h_0 + 3\, g\, r\, sin(\alpha)}$$

On suppose que la bille atteint le point B tout en restant collée à la paroi

l) **Déterminer la vitesse $\boldsymbol{v}$ de la bille en $\boldsymbol{B}$ en fonction des paramètres et déterminer la plus petite valeur $\boldsymbol{v_{min}}$ de cette vitesse (0,5 pt).**

Plus petite vitesse pour : $v_0^2 = 2\, g\, h_0 + 3\, g\, r\, sin(\alpha)$

Alors :

$$v^2 = v_0^2 - 2\, g\, \big(h_0 + r\, sin(\alpha)\, sin(\theta)\big) = 2\, g\, h_0 + 3\, g\, r\, sin(\alpha) - 2\, g\, \big(h_0 + r\, sin(\alpha)\, sin(\theta)\big)$$

$$= g\, r\, sin(\alpha)$$

Donc :

$$v_{min} = \sqrt{g\, r\, sin(\alpha)}$$

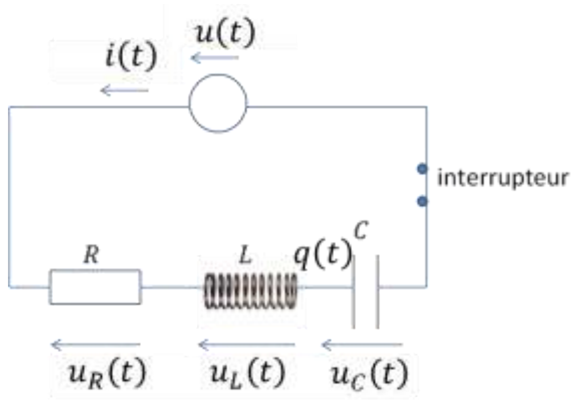
Problème 2 : Bande passante d'un circuit R L C (12 pts)

1) **Circuit R L C**

On considère un circuit formé par la mise en série d'un résistor de résistance R, d'une self idéale d'inductance L et d'un condensateur de capacité C. L'ensemble est alimenté par une tension alternative d'amplitude $\widehat{U}$ dépendant du temps t sous la forme :

$$u(t) = \widehat{U}\ cos(\omega\ t)$$

On note $u_R(t), u_L(t), u_C(t)$ les valeurs instantanées des tensions aux bornes des dipôles concernés, $i(t)$ l'intensité traversant ces dipôles et $q(t)$ la charge instantanée de l'armature du condensateur sur laquelle parvient l'intensité (voir schéma).



a) Rappeler les relations entre valeurs instantanées de tension et d'intensité pour chacun des trois dipôles (3 pts)

$$u_R(t) = R\ i(t)$$
$$u_L(t) = L\ \frac{di(t)}{dt}$$
$$\begin{cases} q(t) = C\ u_C(t) \\ i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow\ i(t) = C\ \frac{du_C(t)}{dt}$$

b) En appliquant la loi d'additivité des tensions, montrer que la charge $q(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme (2 pt) :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\ \alpha\ \frac{dq}{dt} + {\omega_0}^2\ q = \frac{\widehat{U}}{L}\ cos(\omega\ t)$$

On explicitera α et ω_0 en fonction des paramètres R, L, C

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u(t)$$
$$R\ i(t) + L\ \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\ q(t) = u(t)$$

$$R\ \frac{dq(t)}{dt} + L\ \frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}\ q(t) = \hat{U}\ cos(\omega\ t)$$
$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\ \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{L\ C}\ q(t) = \frac{\hat{U}}{L}\ cos(\omega\ t)$$

$$\alpha = \frac{R}{2\ L}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\ C}}$$

On admet que la solution correspondant au régime permanent est de la forme :

$$q(t) = \hat{Q}\ cos\left(\omega\ t + \varphi_q\right)$$

$\hat{Q}$ dépendant comme φ de ω et étant positif

c) **En déduire que l'intensité $i(t)$ se met sous une forme analogue $i(t) = \hat{I}\ cos\left(\omega\ t + \varphi_I\right)$ et exprimer $\hat{I}$ et φ_I en fonction de $\hat{Q}$ et φ_q (1 pt)**

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \omega\ \hat{Q}\ cos\left(\omega\ t + \varphi_q + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\hat{I} = \omega\ \hat{Q}, \qquad \varphi_I = \varphi_q + \frac{\pi}{2}$$

2) <u>Bande passante du circuit R L C</u>

On admet que l'amplitude de l'intensité dépend de ω sous la forme :

$$\hat{I}(\omega) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + \left(L\ \omega - \frac{1}{C\ \omega}\right)^2}}$$

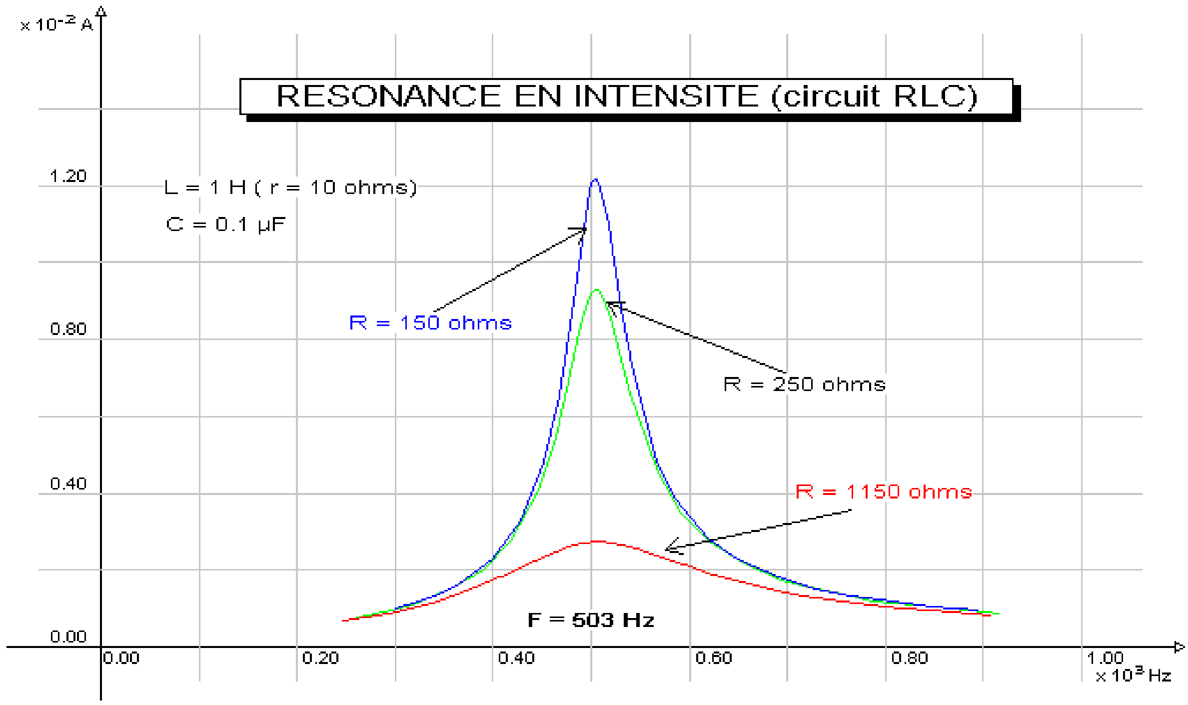
a) **Déterminer la valeur maximale de $\hat{I}(\omega)$ ainsi que la pulsation ω_0 pour laquelle cette valeur est atteinte (1 pt)**

$$\hat{I}_{max} = \frac{\hat{U}}{R}$$

Atteint pour :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\ C}}$$

b) Donner l'allure du graphe de la fonction $\hat{I}(\omega)$ (1 pt)



c) Déterminer les deux valeurs de pulsation ω_1 et ω_2 telles que (1,5 pt) :

$$\hat{I}(\omega) = \frac{\hat{I}(\omega_0)}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{I}(\omega) = \frac{\hat{I}(\omega_0)}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2}} = \frac{\hat{U}}{R\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2 = 2\,R^2$$

$$\Leftrightarrow R^2 = \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow R = L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega} \; ou \; -R = L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}$$

$$\Leftrightarrow L\,C\,\omega^2 - R\,C\,\omega - 1 = 0 \; ou \; L\,C\,\omega^2 + R\,C\,\omega - 1 = 0$$

Les racines des deux trinômes de même discriminant Δ en ω étant de signes contraires, on obtient deux valeurs positives :

$$\omega_1 = \frac{R\,C + \sqrt{\Delta}}{2\,L\,C}, \qquad \omega_2 = \frac{-R\,C + \sqrt{\Delta}}{2\,L\,C}$$

d) En déduire la bande passante de pulsations du circuit R, L , C (1 pt)

$$\boldsymbol{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1}$$

Et l'exprimer en bande passante de fréquences :

$$\boldsymbol{\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\,\pi}}$$

$$\Delta\omega = \frac{R}{L}$$

$$\Delta f = \frac{R}{2\,\pi\,L}$$

e) En déduire le facteur de qualité du circuit $\boldsymbol{Q = \omega_0/\Delta\omega}$ en fonction de $\boldsymbol{L, \omega_0, R}$ (0,5 pt) :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{L\,\omega_0}{R}$$

Dans le domaine des émissions de radio, des bandes de fréquence sont attribuées aux différentes émissions qui émettent à une fréquence située au milieu de la bande qui leur est attribuée. La largeur de chaque bande est d'environ 200 kHz. Un poste radio est équipé d'un tuner qui est un circuit R , L, C permettant de sélectionner une émission en réglant sa fréquence de résonnance sur la fréquence de l'émission désirée.

On souhaite recevoir l'émission 100.50 FM qui émet sur une porteuse de 100,50 MHz. On dispose d'un résistor de résistance $R = 1\ k\Omega$.

f) Déterminer les valeurs de $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{C}$ afin de recevoir au mieux cette émission (1 pt)

$$\Delta f = \frac{R}{2\,\pi\,L} \Rightarrow L = \frac{R}{2\,\pi\,f} = \frac{1000}{2\,\pi\ \times 2 \times 10^5} \approx 8{,}0 \times 10^{-4}\ H$$

$$f_0 = \frac{1}{2\,\pi\,\sqrt{L\,C}} \Rightarrow C = \frac{1}{4\,\pi^2\,L\,{f_0}^2} = \frac{1}{4\,\pi^2 \times\ 8{,}0 \times 10^{-4} \times\ (100{,}5 \times 10^6)^2} \approx 3{,}1 \times 10^{-15}\ F$$