Concours interne – sujet de physique 2019

Durée : 3 H

Le sujet comporte deux problèmes indépendants. Dans chaque problème, les questions sont relativement indépendantes. Il est conseillé de faire un brouillon car les réponses se font impérativement dans les encarts de l'énoncé prévus à cet effet. Aucune feuille de brouillon additionnelle ne sera prise en compte et le soin sera également considéré.

Problème 1 : Electronique (18 pts)

1) Résistance interne d'une pile

On dispose d'un jeu de 4 résistors de résistances : $47, 100, 220, 1000\ \Omega$, de deux multimètres, de fils de connexion et d'une pile plate de 4,5 V (figure 1). On réalise tour à tour avec chaque résistor, un circuit où la pile débite dans le résistor. Un des multimètres est utilisé en voltmètre pour lire la tension U délivrée par la pile et l'autre, en ampèremètre pour lire l'intensité I du courant débité par la pile selon le montage de la figure 2.

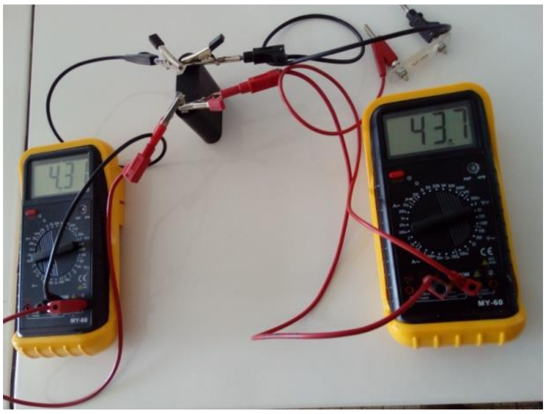
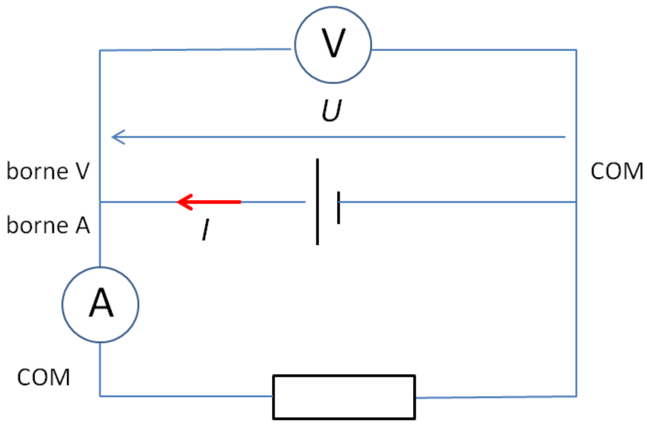


Figure 1 : matériel employé

Figure 2 : circuit réalisé

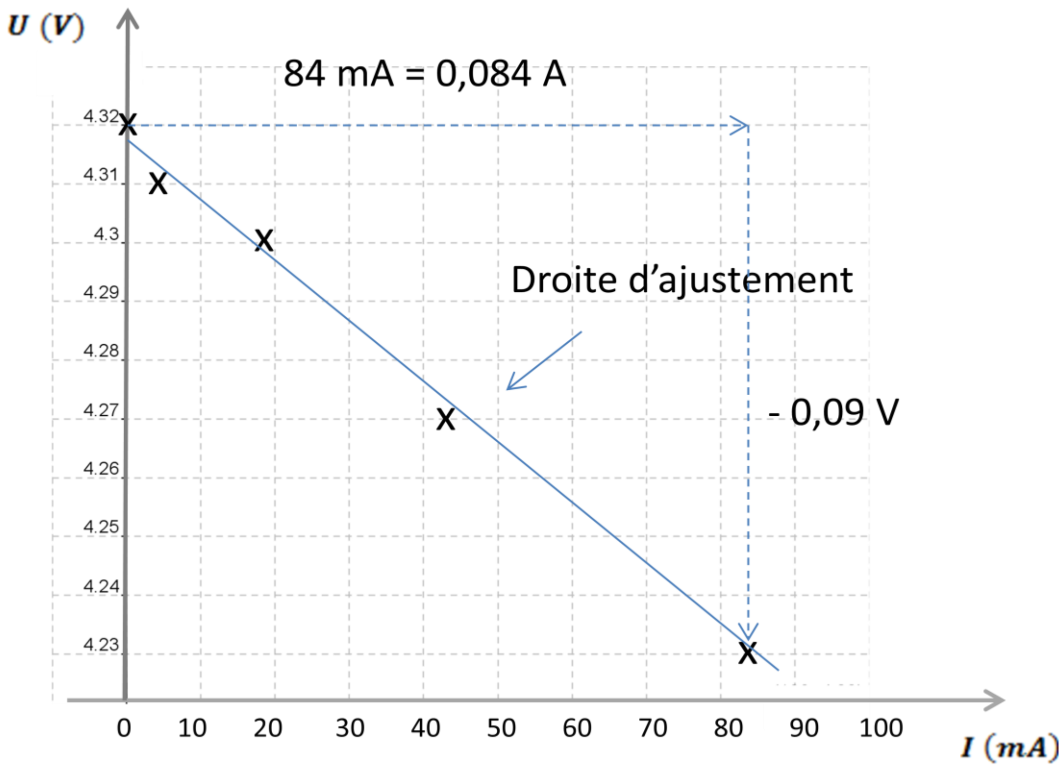
a) Faire le schéma du montage de la figure 2 en utilisant les symboles normalisés. Préciser pour les multimètres les bornes A, V et COM, les branchements des multimètres étant tels que la tension U et l'intensité I aient des valeurs positives. On fera également apparaitre U et I sur le schéma (1,5 pts).



On appelle caractéristique de la pile, la relation qui lie l'intensité I à la tension U et on se propose de lui déterminer une forme mathématique simple par voie expérimentale. On relève pour cela les différents couples (I, U) obtenus pour les 4 résistors auquels on adjoint un couple correspondant à une résistance infinie et un couple correspondant à une résistance nulle. Le tableau de mesures est le suivant :

Résistance (Ω)	infinie	1000	220	100	47	0
Intensité (mA)	0	4,2	19,3	42,7	84	5000
tension (V)	4,32	4,31	4,30	4,27	4,23	0,86

b) **Représenter sur le graphique ci-dessous le nuage de points (I, U) obtenus avec les 4 résistors et la résistance infinie (1 pt):**



c) **Expliquer comment ont été mesurés les deux couples additionnels (résistance infinie et résistance nulle). Préciser notamment la raison de la valeur nettement plus élevée de l'intensité pour une résistance nulle et expliquer pourquoi les mesures étaient dans ce cas très instables (1 pt).**

Explication :

résistance infinie = circuit ouvert
résistance nulle = court-circuit (pas de résistor)
En court circuit la pile débite un fort courant, elle se décharge alors très rapidement, ce qui explique l'instabilité dans la pris de mesures.

Le graphique permet de constater que les points sont proches d'un alignement et donc qu'un lien entre I et U peut être traduit par une relation mathématique de la forme :

$$U = e - r\, I$$

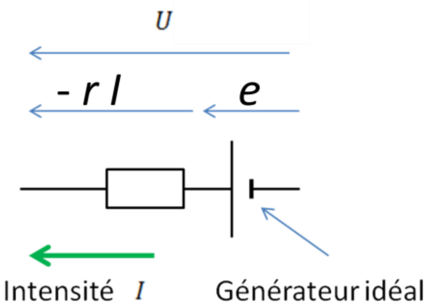
e est appelée force électromotrice de la pile et r résistance interne de la pile.

d) A l'aide du graphique, donner une valeur numérique de e et r en précisant les unités et en faisant apparaitre sur le graphique la méthode employée (1,5 pt).

$e = 4{,}32\ V$ (ordonnée à l'origine du graphique)

$$r = -\frac{\Delta U}{\Delta I} \approx \frac{4{,}32 - 4{,}23}{0{,}084} = \frac{0{,}09}{0{,}084} \approx 1{,}1\ \Omega$$

e) montrer que la pile est équivalente à un générateur délivrant une tension constante mis en série avec un résistor en complétant le schéma suivant par les caractéristiques e et r établies précédemment et par la tension aux bornes du résistor (0,5 pt)



Un générateur délivrant une tension constante est qualifié de générateur de tension idéal.

2) Capacité dynamique d'un condensateur

Un condensateur est un composant électronique composé de deux armatures conductrices séparées par un isolant. Quand le condensateur est à l'équilibre électrostatique, la charge q portée par une armature, mesurable à l'aide d'un galvanomètre balistique est liée à la tension U entre cette armature et l'autre, mesurée par un voltmètre, par une relation linéaire de la forme :

$$q = C\, U$$

a) Justifier l'appellation de capacité de C et donner son unité ? (1 pt)

C est la charge portée par l'armature positive pour une tension entre armatures de 1 V. Son unité est le Fahrad de symbole F

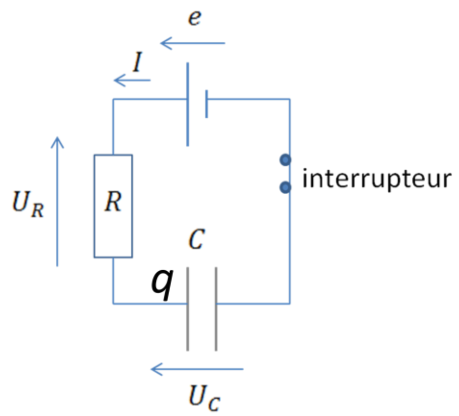
b) On suppose le condensateur à armatures planes séparées d'une distance d.

- **Faire un schéma du condensateur et dessiner les lignes du champ électrostatique entre les deux armatures.**
- **Quelle particularité présente le champ électrostatique entre les armatures ? Le représenter sur le schéma**
- **Quelle relation lie ce champ à la tension U et à la distance d ? (1,5 pt)**

Les lignes de champ sont perpendiculaires aux armatures. Le champ électrique est constant entre les armatures, dirigé de l'armature positive vers l'armature négative et vérifie :

$$U = \|\vec{E}\| \times d$$

On réalise le montage de la pile précédente de 4,5 V en série avec un résistor de résistance R, cette valeur incluant la résistance interne de la pile de telle sorte que le générateur soit considéré comme idéal, et avec un condensateur de capacité C. On note U_R la tension aux bornes du résistor et U_C celle aux bornes du condensateur telles que définies sur le schéma. Le générateur délivre une tension constante e et débite un courant d'intensité I



On note q la charge de l'armature telle que $q = C\,U_C$

c) Porter q sur le schéma (0,5 pt)

On suppose que la relation $q = C\,U_C$ reste valable pendant la phase de charge du condensateur et pas seulement à l'équilibre électrostatique de ce dernier.

d) Quelle relation mathématique lie la charge q et l'intensité I ? (1 pt)

$$I = \frac{dq}{dt}$$

e) En appliquant la loi d'additivité des tensions, établir une relation entre U_R, U_C, e (1 pt)

$$U_R + U_C = e$$

f) **Etablir une relation entre U_R et I et lui donner un nom (1 pt)**

$$U_R = R\,I \quad \text{(loi d'Ohm)}$$

g) **et une relation entre U_C et I (1 pt)**

$$q = C\,U_C \Rightarrow \; I = \frac{dq}{dt} = C\,\frac{dU_C}{dt}$$

h) **Montrer que U_C satisfait pendant la phase de charge à l'équation différentielle (1 pt) :**

$$\boldsymbol{R\,C\,\frac{dU_C}{dt} + U_C = e}$$

$$U_R + U_C = e \Rightarrow R\,I \; + U_C = e \Rightarrow R\,C\,\frac{dU_C}{dt} \; + U_C = e$$

i) Sans chercher à résoudre cette équation, déterminer la valeur de la tension U_C lorsque le condensateur est chargé. On justifiera (1 pt)

Condensateur chargé $\Rightarrow \frac{dU_C}{dt} = 0 \Rightarrow U_C = e$

On rappelle la solution mathématique générale d'une équation différentielle de la forme :

$$\frac{df(t)}{dt} = a\,f(t) + b \quad \text{où } \; a, b \; constantes$$

$$f(t) = A\,e^{a\,t} - \frac{b}{a}, \;\; \text{où } A \; constante\; réelle$$

j) **L'origine des temps étant prise à la fermeture de l'interrupteur, le condensateur étant initialement déchargé, montrer que U_C s'exprime en fonction du temps t par une relation de la forme :**

$$\boldsymbol{U_C = A\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

où τ est appelée constante de temps. On exprimera A et τ à partir des données du problème R, C, e (2 pts)

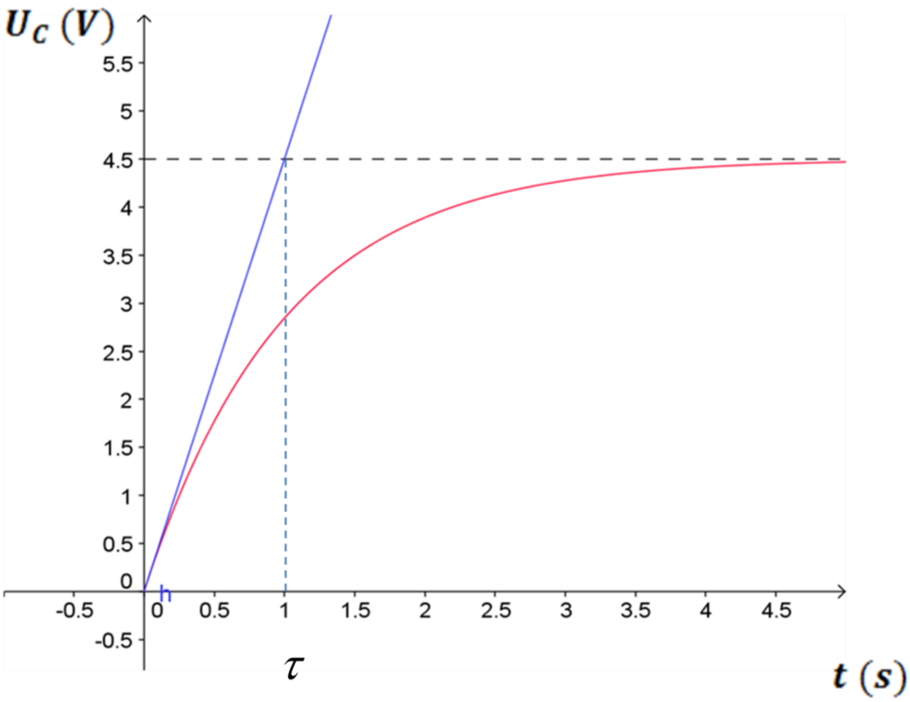
$$\frac{dU_C}{dt} = -\frac{1}{R\,C}U_C + \frac{e}{R\,C}, \;\; a = -\frac{1}{R\,C}, \qquad b = \frac{e}{R\,C}$$

$$U_C = A\,e^{-\frac{1}{R\,C}t} + \frac{e}{R\,C} \times R\,C = A\,e^{-\frac{1}{R\,C}t} + e$$

$$U_C(0) = 0 \Rightarrow \; A = -e \Rightarrow U_C = A\left(1 - e^{-\frac{1}{R\,C}t}\right)$$

$$\tau = R\,C$$

Un oscilloscope cathodique a donné pour U_C le signal suivant (en rouge) :



k) **En établissant l'équation de la tangente à l'origine (représentée en bleu sur le graphique), expliquer comment à l'aide de ce signal mesurer la constante de temps τ et lire sa valeur sur le graphique (1,5 pt) :**

Tangente en 0:

$$y(t) = \frac{dU_C}{dt}(0)\, t + U_C(0)$$

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{e}{\tau}\, e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \frac{dU_C}{dt}(0) = \frac{e}{\tau} \Rightarrow y(t) = \frac{e}{\tau}\, t \Rightarrow y(\tau) = e$$

τ est donc l'abscisse du point d'intersection de la tangente en 0 à la courbe du signal avec la droite d'équation $y = e$ qui est également l'asymptote horizontale à la courbe du signal en $+\infty$

l) **En déduire la valeur de C sachant $R = 1000\ \Omega$ (1 pt)**

$$C = \frac{\tau}{R} = \frac{1}{1000} = 10^{-3}\ F$$

Problème 2 : Mécanique classique et mécanique relativiste (12 pts)

1) Lois de la mécanique classique – Travail – Energie

On considère une particule de masse m ne pouvant se déplacer que selon un axe $(O, \vec{\imath})$. On note $\vec{F}$ la résultante des forces agissant sur cette particule, $\vec{a}$ son vecteur accélération, $\vec{v}$ son vecteur vitesse et on pose :

$$\vec{v} = v\,\vec{\imath}, \qquad \vec{a} = a\,\vec{\imath}, \qquad \vec{F} = F\,\vec{\imath}$$

a) Donner l'énergie cinétique E_c de la particule en fonction des paramètres (1 pt)

$$E_c = \frac{1}{2}\, m\, v^2$$

b) En s'aidant de la seconde loi de Newton montrer que l'on a (1 pt) :

$$\boldsymbol{F\,v = \frac{dE_c}{dt}}$$

Seconde loi de Newton :

$$F = m\,\frac{dv}{dt} \Rightarrow\; F\,v = m\,v\,\frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\,m\,v^2\right)}{dt} = \frac{dE_c}{dt}$$

c) **Quel nom donne-t-on au terme $F\,v$ et quelle est son unité ? (1 pt)**

$F\,v$ est la puissance de la force $\vec{F}$. Son unité est le Watt de symbole W

2) Vers la mécanique relativiste – Formule d'Einstein

Faisant suite à l'échec des expériences de Michelson et Morley visant à mettre en évidence un milieu de propagation pour la lumière (une sorte d'éther) Einstein postula que la lumière se propage à la même vitesse $\boldsymbol{c}$ dans tous les référentiels galiléens. La valeur la plus précise obtenue à partir des définitions du mètre et de la seconde initiales conduisit à fixer sa valeur à :

$$\boldsymbol{c = 299\,792\,458\; m\, s^{-1}}$$

Cette valeur fixée dès lors comme un invariant a permis, assorti à la définition précise de la seconde permise par les horloges atomiques, a une redéfinition du mètre bien plus précise telle que requise par les échelles nanoscopiques des molécules. Dans la vision d'Einstein, qui n'était qu'un postulat, toujours inviolé à ce jour, aucune particule ne peut dépasser la vitesse de la lumière, ce qui pose problème en mécanique classique.

a) **En considérant la particule du 1) soumise à une force constante F, montrer en quoi la vision d'Einstein est en contradiction avec le mécanique classique (1 pt)**

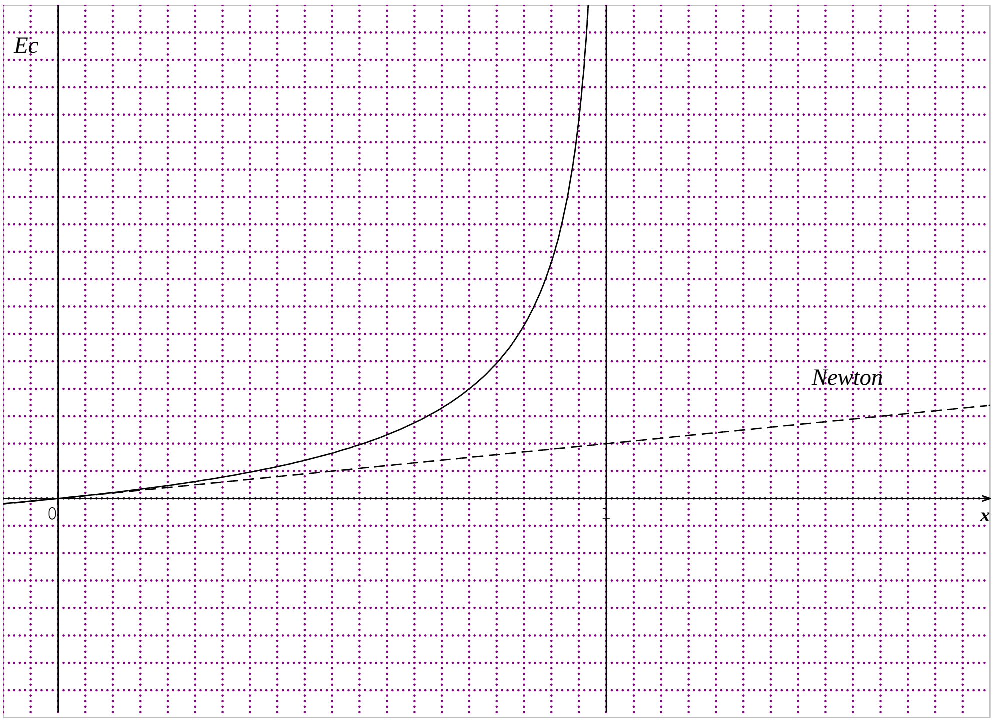
$$F = m\,\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \Rightarrow v = \frac{F}{m}\,t + cte$$

La vitesse tend donc vers l'infini quand le temps tend vers l'infini ce qui contredit l'hypothèse d'Einstein

On se propose de corriger la formule de l'énergie cinétique de la mécanique classique afin d'être compatible avec la vision d'Einstein. Pour cela, on considère qu'aux vitesses faibles devant la vitesse de la lumière, la formule classique de l'énergie cinétique reste valable. On suppose également que l'énergie cinétique peut tendre vers l'infini comme en mécanique classique mais que la vitesse doit alors tendre vers la vitesse de la lumière. On propose donc un modèle où l'énergie cinétique est fonction de la vitesse selon une loi mathématique de la forme suivante, où on a choisi de prendre une variable adimensionnelle x :

$$E_c = f(x) \quad où \quad x = \frac{v^2}{c^2}$$

La fonction f ayant un graphique a l'allure suivante :



Sur le graphe a été représentée en pointillé également, l'énergie cinétique en mécanique classique. Son graphe est tangent en 0 à celui de l'énergie cinétique relativiste.

b) Exprimer l'énergie cinétique classique de la particule en fonction de sa masse m, de c et de x (1 pt)

$$E_c = \frac{1}{2}\, m\, c^2 \;\; \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2}\, m\, c^2\, x$$

Parmi les fonctions d'expression simple susceptibles de convenir, on peut prendre :

$$f(x) = k\, \left(\frac{1}{(1-x)^{\alpha}} - 1\right)$$

Où k et α sont des constantes à déterminer.

c) Vérifier que f a bien l'allure souhaitée c'est-à-dire, qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1[$ et a pour limite $+\infty$ en 1 et vaut 0 en 0. (1,5 pt)

$$f'(x) = k\,(-\alpha)\,(-1)(1-x)^{-\alpha-1} = \frac{k\,\alpha}{(1-x)^{\alpha+1}} > 0$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$$

d) Déterminer l'équation de la tangente en 0 à la courbe de f et en déduire une valeur de k et une valeur de α simples telles que cette tangente soit la même que celle donnée pour l'énergie cinétique en mécanique classique. On fera un choix tel que α soit indépendant de m et de c (1,5 pt)

$$T_0\!: \;\; y = f'(0)\, x + f(0)$$

$$f'(0) = k\,\alpha, f(0) = 0 \Rightarrow T_0\!: \;\; y = k\,\alpha\, x$$

Mécanique classique :

$$T_0\!: \;\; y = \frac{1}{2}\, m\, c^2\, x$$

Identification :

$$\alpha = \frac{1}{2}, \;\; k = m\, c^2$$

e) En déduire que l'énergie cinétique relativiste se met sous forme (1 pt) :

$$\boldsymbol{E_c = (\gamma - 1)\, m\, c^2}$$

En précisant bien l'expression de γ en fonction de la vitesse v de la particule et de c

$$E_c = m\, c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = (\gamma - 1)\, m\, c^2, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

La relation précédente peut se mettre sous la forme :

$$E_c + m\,c^2 = \gamma\, m\, c^2$$

Cela suggéra que la quantité $m\,c^2$ était une énergie potentielle, appelée énergie au repos de la particule. Cette expression de l'énergie fut à l'origine de l'idée de l'énergie nucléaire, puisque par bombardement par des neutrons, il fut observé que des noyaux d'uranium 235 se scindaient en deux atomes de masses plus petites mais dans le bilan réactionnel, la masse des produits de fission se révéla plus faible que la masse des réactifs, violant la sacro-sainte règle établie par Lavoisier quant à la conservation de la masse dans une réaction. Einstein interprèta cette perte de $m\,c^2$ comme étant, par principe de conservation d'énergie, un transfert en une autre forme d'énergie, et a priori, selon ce qui était connu en physique classique, en énergie mécanique microscopique, c'est-à-dire une énergie d'agitation thermique. La mesure de cette perte de $m\,c^2$ par atome d'uranium fissionné suggéra l'idée d'une bombe avec une puissance de destruction colossale. Einstein regretta probablement très amèrement sa formule par le feu nucléaire qu'elle donna entre les mains des hommes et il devint pacifiste.

A partir de la formule relativiste, on peut déduire la formule modifiée de la seconde loi de Newton. On conserve le principe selon lequel :

$$F\,v = \frac{dE_c}{dt}$$

f) Exprimer $\boldsymbol{F}$ à l'aide de $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{v}$ et en déduire que l'on a (2 pts) :

$$\boldsymbol{F = \frac{d(\gamma\, m\, v)}{dt}}$$

$$E_c = (\gamma - 1)\, m\, c^2 \Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = m\, c^2\, \frac{d\gamma}{dt} = m\, c^2\, \frac{d\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{dt}$$

$$= m\, c^2 \left(-2\, \frac{v}{c^2}\, \frac{dv}{dt} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right) = m\, v\, \frac{dv}{dt}\, \gamma^3 \Rightarrow F = \gamma^3 m\, \frac{dv}{dt}$$

Or :

$$\frac{d(\gamma\, m\, v)}{dt} = m\left(\frac{d\gamma}{dt}\, v + \frac{dv}{dt}\, \gamma\right) = m\left(\gamma^3\, \frac{v^2}{c^2}\, \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dt}\, \gamma\right)$$

$$= m\, \gamma\, \frac{dv}{dt}\left(\gamma^2\, \frac{v^2}{c^2} + 1\right) = m\, \gamma\, \frac{dv}{dt}\, \gamma^2 = \gamma^3 m\, \frac{dv}{dt}$$

Donc :

$$F = \frac{d(\gamma\, m\, v)}{dt}$$

La quantité $\gamma\, m$ s'appelle masse inertielle, m étant la masse au repos. La quantité $p = \gamma\, m\, v$ est appelée quantité de mouvement. Aux vitesses faibles devant celle de la lumière on a $\gamma = 1$ et $p = m\, v$ ce qui redonne la quantité de mouvement classique

g) En déduire qu'aux faibles vitesses, l'action d'une force est, d'augmenter la vitesse donc par son travail l'énergie cinétique classique, mais aux vitesses proches de la lumière, son action est d'augmenter la masse inertielle sans changer notablement la vitesse (1 pt)

On pose : $m_i = \gamma\, m$ (masse inertielle)

$$F = \frac{d(m_i\, v)}{dt} = m_i \frac{dv}{dt} + v \frac{d(m_i)}{dt}$$

Aux vitesses faibles devant c (considérées comme classiques) : $m_i \approx m$ (masse au repos)

$$F \approx m\, \frac{dv}{dt}$$

Aux vitesses proches de c

$$F \approx c \frac{d(m_i)}{dt}$$

Pour prendre une image et pour finir : c'est comme si, poussant une souris avec toujours la même force, on commençait par lui donner d'abord de la vitesse, puis de moins en moins et finalement de la masse. La souris serait devenue donc pour nous en quelque sorte, un éléphant, qui n'avancerait plus sous notre poussée.

Les souris expérimentales existent, ce sont des électrons circulant dans des cyclo-synchrotrons et qui reçoivent un travail dans des chambres d'accélération mais finissent après un certain nombre de tours à ne plus produire d'accélération. Ils deviennent inertiels !!!