Composition de Physique 2018

Durée 3 H

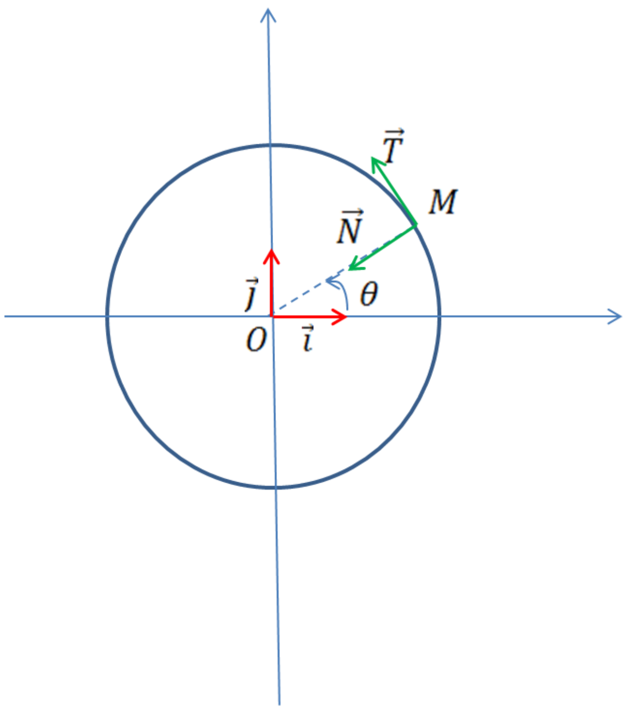
Les calculatrices sont autorisées.
L'énoncé est composé de 3 problèmes indépendants et d'une annexe ***à rendre avec la copie.***
Le candidat veillera à :
- *respecter et rappeler les numéros des exercices et des questions traitées, maîtriser les notations de l'énoncé, introduire les siennes en les définissant.*
- *présenter une rédaction soignée : écriture manuscrite à l'encre, lisible, réponses encadrées.*

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème 1 : Electron orbitant autour d'un proton dans une vision classique (12 points):

Partie I : Etude d'un mouvement circulaire général

On considère un point M ayant un mouvement circulaire de centre O et de rayon r. On étudie ce mouvement dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan du mouvement et la position du point M est repérée par l'angle polaire $\theta = \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$ qui est une fonction supposée continue, et deux fois dérivable de la variable temps t. On note $\vec{T}$ le vecteur unitaire tangent au cercle au point M et considéré dans le sens des θ croissants et on note $\vec{N}$ le vecteur unitaire normal qui pointe dans la concavité, donc vers le centre du cercle (voir figure ci-dessous)



On notera pour simplifier dans toute la suite :

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \ ; \ \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

1) Exprimer les coordonnées cartésiennes (x, y) du point M en fonction de ses coordonnées polaires (r, θ)
2) Exprimer les coordonnées des vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{N}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en fonction de θ. On pourra considérer les angles orientés $(\vec{\imath}, \vec{T}\,)$ et $(\vec{\imath}, \vec{N}\,)$
3) Déterminer les coordonnées du vecteur-vitesse $\vec{v}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en fonction de r, θ et $\dot{\theta}$ et en déduire que $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{T}$ puis déterminer la composante v de $\vec{v}$ sur $\vec{T}$ en fonction de r et $\dot{\theta}$
4) Déterminer les coordonnées du vecteur-accélération $\vec{a}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en fonction de r, θ, v et dv/dt
5) En déduire une expression du vecteur-accélération dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$. Les coordonnées dans cette base seront exprimées en fonction de r, v et dv/dt

Partie II : <u>Etude du mouvement de l'électron</u>

On considère dans le cadre de la mécanique classique un électron en orbite circulaire uniforme de rayon r autour d'un proton (modèle de l'atome d'hydrogène). Le mouvement est décrit comme dans la partie I et on donne :

Constante électrostatique intervenant dans la loi de Coulomb ;

$$k = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \ \ (S.I)$$

Constante de gravitation universelle ;

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11} \ \ (S.I)$$

masse d'un électron : $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\ kg$, masse d'un proton : $m' = 1{,}67 \times 10^{-27}\ kg$

charge d'un proton : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\ C$

1) L'action du proton sur l'électron est représentée par un vecteur force électrostatique $\vec{F}$ tel que $\vec{F} = e\,E(r)\,\vec{N}$. Exprimer $E(r)$ en fonction de k, r, e
2) Une autre force agit sur l'électron. Quelle est sa nature ? Montrer en calculant son rapport à la précédente que son intensité est négligeable devant celle de la force électrostatique.
3) Appliquer à l'électron la deuxième loi de Newton dans la base de Frenet et en déduire une expression de l'énergie cinétique de l'électron en fonction de k, r, e
4) Calculer le potentiel électrostatique défini par l'intégrale suivante

$$V(r) = \int_r^{+\infty} E(u)\ du$$

5) En déduire que l'énergie potentielle électrostatique du système formé par le proton et l'électron a pour expression :

$$E_p = -\,k\,\frac{e^2}{r}$$

6) Que représente cette énergie potentielle ?
7) En déduire l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de $,r,e$. Quel est le signe de cette énergie ?

Partie III :

En 1888, un physicien suédois, Johannes Rydberg, propose une formule empirique pour décrire la série de raies observées par Balmer dans le spectre d'émission de l'hydrogène dans le domaine visible :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2}\right)$$

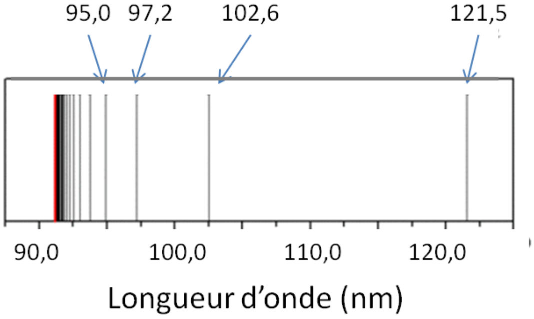
où m est un entier naturel tels que $m > 4$ et R_H la constante de Rydberg de valeur

$$R_H \approx 1{,}097 \times 10^7\ m^{-1}$$

Dans les années qui suivent, d'autres séries de raies sont identifiées, celle de Lyman en 1906, puis, dans l'infra-rouge, celle de Paschen en 1908 et celle de Brackett en 1922. La première formule proposée par Rydberg se voit alors généralisée sous la forme :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

où n et m sont des entiers naturels non nuls avec $m > n$. $n = 2$ correspond à la série de Balmer, $n = 1$ à celle de Lyman, $n = 3$ à celle de Paschen et $n = 4$ à celle de Brackett. On donne ci-dessous la série de raies observée par Lyman.



1) Rappeler les différents domaines du spectre d'émission d'un atome et justifier que la formule donnée par Rydberg pour décrire les raies de la série de Balmer correspond bien majoritairement au domaine visible du spectre
2) A quelle partie du spectre correspond la série de Lyman ?

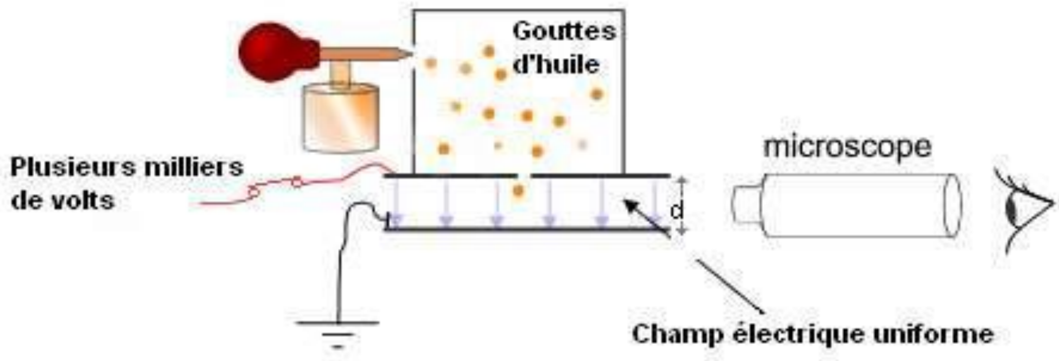
3) A l'aide de la formule de Rydberg pour $= 1$, vérifier que la raie la plus à droite de la série de Lyman correspond à $m = 2$. En déduire la longueur d'onde de la raie située immédiatement à gauche de celle de longueur d'onde 95 nm

4) Selon la théorie des quanta développée par Albert Einstein, une raie du spectre d'émission correspond à l'émission d'un photon d'énergie $E = h\,\nu$, où $h = 6{,}62 \times 10^{-34}\ (S\,I)$ et ν est la fréquence associée à la radiation.
   a) Quelle est l'unité de h dans le système international ?
   b) Quelle est la relation entre longueur d'onde λ, célérité c de la lumière dans le vide et fréquence ν ?
   c) En déduire que l'énergie du photon émis correspondant à la raie caractérisée par les nombres entiers n et m se met sous forme :

$$h\,\nu = k\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

   où k est une constante que l'on exprimera à partir de h, c, R_H puis que l'on calculera
   d) Rappeler la valeur de 1 électron-volt (eV) en Joule (J) puis vérifier qu'en exprimant l'énergie du photon en eV la valeur de k est 13,6
   e) En admettant que l'émission d'un photon d'énergie $h\,\nu$ s'accompagne d'une baisse en quantité égale de l'énergie mécanique de l'électron de l'atome d'hydrogène, expliquer en quoi la formule de Rydberg montre que cette énergie est quantifiée, c'est-à-dire ne peut prendre que des valeurs discrètes. Justifier la formule qui en découle pour décrire le niveau d'énergie d'un électron dans l'atome d'hydrogène ainsi que son signe.

Problème 2 : **L'expérience de Millikan (1910) (8 pts)**



Un pulvérisateur produit un nuage de gouttelettes d'huiles, qui par la friction opérée par leur passage à travers la buse de sortie, se chargent électriquement, avant de tomber dans la chambre supérieure d'un dispositif. Certaines gouttes parviennent à passer au travers d'un orifice pratiqué dans l'armature supérieure d'un condensateur plan et retombent entre les deux armatures dans un mouvement vertical rectiligne uniforme, où la force de frottement exercée par l'air compense le poids des gouttes. On observe à l'aide d'un microscope et d'une règle finement graduée le mouvement descendant très lent d'une goutte (de l'ordre du dixième de millimètres par seconde) ce qui permet d'en mesurer la vitesse de descente v_1. Lorsque la goutte parvient à proximité de l'armature basse du condensateur, on applique une tension U à ce dernier que l'on règle de telle sorte à ce que la goutte remonte toujours lentement et quasi instantanément à vitesse constante, donc dans un mouvement ascendant rectiligne uniforme à une vitesse v_2 que l'on mesure également.

La loi de Stokes permet d'établir une expression de la force de frottement $\vec{f}$ agissant sur un objet de forme sphérique en déplacement avec un vecteur vitesse $\vec{v}$ dans un fluide :

$$\vec{f} = -6\,\pi\,\mu\,r\,\vec{v}$$

où: $r =$ rayon de la sphère ; $\mu =$viscosité dynamique du fluide (pour l'air $\mu = 1{,}8 \times 10^{-5}$ S I)

On s'intéresse à un certain nombre de gouttelettes pour lesquelles on a mesuré v_1 et v_2 et on cherche à en déduire leur charge. Mais le rayon d'une gouttelette n'étant pas mesurable, c'est la loi de Stokes qui va permettre de l'évaluer indirectement.

On admet qu'entre les deux armatures du condensateur plan sous tension, le champ électrostatique $\vec{E}$ est constant et dirigé vers le bas et que la force électrostatique s'exerçant sur une goutte porteuse d'une charge q est : $\vec{F} = q\,\vec{E}$ et que l'on a la relation : $U = \|\vec{E}\| \times d$, où d est la distance entre les armatures du condensateur.

1) Donner les unités de la viscosité dynamique μ en utilisant les symboles kg, m, s
2) Faire un schéma des forces agissant sur la gouttelette pendant sa chute entre les deux plaques du condensateur non encore mis sous tension. Puis, en appliquant la deuxième loi de newton à cette gouttelette pendant ce mouvement descendant, déterminer son rayon r en fonction de μ, v_1, ρ, g où :

   $$\rho = \text{masse volumique de l'huile} = 980\;kg\;m^{-3}\;;\quad g = 9{,}8\;m\;s^{-2}$$

   On rappelle le volume d'une boule de rayon r :

   $$V = \frac{4}{3}\pi\,r$$

3) Faire l'application numérique sachant que la gouttelette a mis $10\;s$ pour chuter de $2{,}11\;mm$
4) Afin d'obtenir une bonne précision de lecture au microscope, dire en justifiant s'il vaut mieux sélectionner une petite ou une grosse goutte.
5) Quel est le signe de la charge de la gouttelette ?

6) En appliquant la deuxième loi de newton à la gouttelette pendant son mouvement remontant, déterminer sa charge q en fonction de μ, v_1, v_2, r, U, d
7) On présente dans un tableau les résultats de mesure pour cinq gouttelettes

Numéro de la gouttelette	$v_1 \times 10^{-4}\ m\,s^{-1}$	$v_2 \times 10^{-4}\ m\,s^{-1}$	$q\ (\times 10^{-19}\ C)$	q/e
1	1,55	1,59	$-6{,}4$	
2	1,82	1,81	$-8{,}0$	
3	2,42	1,35	$-9{,}6$	
4	2,76	3,13	$-1{,}6$	
5	1,82	2,53	$-6{,}4$	

Montrer que les charges des gouttelettes sont toutes multiples entières d'une même charge élémentaire e et compléter la dernière colonne du tableau.

Corrigé

Problème 1

Partie I

1) On a :

$$\begin{cases} x = r\,cos(\theta) \\ y = r\,sin(\theta) \end{cases}$$

2) On a :

$$(\vec{\imath}, \vec{T}\,) = \theta + \frac{\pi}{2}$$

$$(\vec{\imath}, \vec{N}\,) = \theta + \pi$$

$$\vec{T}\begin{pmatrix} cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -sin(\theta) \\ sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\vec{N}\begin{pmatrix} cos(\theta + \pi) = -cos(\theta) \\ sin(\theta + \pi) = -sin(\theta) \end{pmatrix}$$

3) On a :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} = -r\,\dot{\theta}\,sin(\theta) = -v\,sin(\theta) \\ \frac{dy}{dt} = \ r\,\dot{\theta}\,cos(\theta) = v\,cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\vec{v} = v\ \vec{T}$$

avec :

$$v = r\,\dot{\theta}$$

4) On a :

$$\vec{a}\begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{dv}{dt}\,sin(\theta) - v\,\dot{\theta}\,cos(\theta) = -\frac{dv}{dt}\,sin(\theta) - \frac{v^2}{r}\ cos(\theta) \\ \frac{dv_y}{dt} = \ \frac{dv}{dt}\,cos(\theta) - v\,\dot{\theta}\,sin(\theta) = \frac{dv}{dt}\,cos(\theta) - \frac{v^2}{r}\,sin(\theta) \end{pmatrix}$$

5) On constate :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{T} + \frac{v^2}{r}\,\vec{N}$$

Partie II

1) On a d'après la loi de Coulomb :

$$E(r) = k\ \frac{e}{r^2}$$

2) La seconde force est la force d'attraction gravitationnelle dont l'intensité est :

$$F' = G\ \frac{m\,m'}{r^2}$$

On a :

$$\frac{F'}{F} = G\ \frac{m\,m'}{r^2} \times \frac{r^2}{k\,e^2} = \frac{G\,m\,m'}{k\,e^2} = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 9{,}1 \times 10^{-31} \times 1{,}67 \times 10^{-27}}{9 \times 10^9 \times (1{,}6 \times 10^{-19})^2} \approx 4{,}4 \times 10^{-40}$$

Donc la force gravitationnelle est négligeable devant la force électrostatique

3) La seconde loi de Newton s'écrit :

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

Soit :

$$e\,E(r)\,\vec{N} = \ m\ \frac{v^2}{r}\ \vec{N}$$

donc :

$$m\ \frac{v^2}{r} = k\ \frac{e^2}{r^2}$$

D'où, l'énergie cinétique de l'électron :

$$E_c = \frac{1}{2} m\,v^2 = \ \frac{k\,e^2}{2\,r}$$

4) On a :

$$V(r) = \int_r^{+\infty} k\ \frac{e}{u^2}\ du = k\,e\ \left[-\frac{1}{u}\right]_r^{+\infty} = \frac{k\,e}{r}$$

5) On en déduit l'énergie potentielle électrostatique du système proton-électron :

$$E_p = -e\,V(r) = -\ \frac{k\,e^2}{r}$$

6) Cette énergie potentielle représente le travail de la force électrostatique sur l'électron venant de l'infini jusqu'à une distance r du proton

7) L'énergie mécanique de lu système proton-électron s'en déduit :

$$E_M = E_c + E_p = \frac{k\,e^2}{2\,r} - \ \frac{k\,e^2}{r} = -\frac{k\,e^2}{2\,r}$$

Elle est négative.

Partie III

1) Les raies d'émissions (autres que rayons X) se répartissent en trois domaines : < 400 nm : ultra-violet, entre 400 et 800 nm : visible, > 800 nm : infra-rouge
   Les longueurs d'onde de la série de Balmer sont définies par la suite :

$$\lambda_m = \frac{1}{R_H \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2}\right)}$$

Cette suite est décroissante, de premier terme :

$$\lambda_3 = \frac{1}{R_H \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)} \approx \frac{1}{1{,}097 \times 10^7 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)} \approx 6{,}56 \times 10^{-7}\, m = 656\, nm$$

Et sa valeur limite est :

$$\lambda_{lim} = \frac{1}{R_H \left(\frac{1}{4} - 0\right)} \approx \frac{1}{1{,}097 \times 10^7 \left(\frac{1}{4}\right)} \approx 3{,}65 \times 10^{-7}\, m = 365\, nm$$

Ces raies se situent donc en grande majorité dans le spectre visible (du moins pour celles observées par Balmer)

2) La série de Lyman se situe dans l'ultra-violet
3) On calcule :

$$\frac{1}{1{,}097 \times 10^7 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)} \approx 1{,}215 \times 10^{-7}\, m = 121{,}5\, nm$$

La raie suivant celle de longueur d'onde 95,0 nm correspond à $m = 6$

$$\frac{1}{1{,}097 \times 10^7 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{6^2}\right)} \approx 9{,}38 \times 10^{-8}\, m = 93{,}8\, nm$$

4) a) L'unité de h est le joule par seconde (Js^{-1})
   b) on a :

$$\lambda = \frac{c}{v}$$

   c) on en déduit :

$$h\, v = \frac{h\, c}{\lambda} = h\, c\, R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

   donc :

$$k = h\, c\, R_H = 6{,}62 \times 10^{-34} \times 3{,}0 \times 10^8 \times 1{,}097 \times 10^7 \approx 2{,}18 \times 10^{-18}\, J$$

5) $1\, e\, V = 1{,}6 \times 10^{-19}\, J$

On en déduit :

$$k = \frac{2{,}18 \times 10^{-18}}{1{,}6 \times 10^{-19}} \approx 13{,}6\ e\ V$$

6) La formule de c) se réécrit, de façon à faire apparaître une variation d'énergie avec une expression d'énergie négative.

$$h\,\nu = -\frac{k}{m^2} - \left(-\frac{k}{n^2}\right) = E_m - E_n$$

en posant :

$$E_n = -\frac{k}{n^2} == -\frac{13{,}6}{n^2}\ \ eV$$

L'émission d'un photon s'accompagne d'une baisse d'énergie mécanique de l'électron de l'atome d'hydrogène, ceci afin d'assurer le principe de conservation de l'énergie.

Problème 2

1) Reprenons l'expression de la force

$$f = -6\,\pi\,\mu\,r\,v$$

f est en $N = kg\ m\ s^{-2}$, r en m et v en $m\ s^{-1}$ donc μ en $kg\ m^{-1}\ s^{-1}$

2) La gouttelette est soumise au cours de sa descente à la force de frottement et à son poids $\vec{P}$. Comme elle descend à vitesse constante dans un mouvement rectiligne uniforme, la loi de Newton permet d'écrire :

$$\vec{f} + \vec{P} = \vec{0}$$

Soit :

$$\|\vec{f}\| = \|\vec{P}\|$$

$$6\,\pi\,\mu\,r\,v_1 = \rho\ \times \frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,g$$

d'où

$$r^2 = \frac{9\,\mu\,v_1}{2\,\rho\,g}$$

Finalement :

$$\boxed{r = \sqrt{\frac{9\,\mu\,v_1}{2\,\rho\,g}}}$$

3) La vitesse de chute est :

$$v_1 = \frac{2,11 \times 10^{-3}}{10} = 2,11 \times 10^{-4}\, m\, s^{-1}$$

donc :

$$r = \sqrt{\frac{9 \times 1,8 \times 10^{-5} \times 2,11 \times 10^{-4}}{2 \times 980 \times 9,8}} \approx 1,3 \times 10^{-6}\, m = 1,3\, \mu m$$

4) La vitesse v_1 est proportionnelle au carré du rayon de la gouttelette. Plus la vitesse sera faible, plus grande sera la précision de lecture au microscope. Il est donc préférable de prendre des gouttelettes de petite taille.
5) Le champ électrostatique étant dirigé vers le bas et la gouttelette attirée vers le haut par la force électrostatique pour pouvoir remonter, elle est donc chargée négativement.
6) Pendant sa phase de remontée, la gouttelette est soumise à trois forces, la force de frottement visqueux, la force électrostatique $\vec{F}$ et son poids. On a donc :

$$\vec{f} + \vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$$

Soit en désignant par $\vec{k}$ un vecteur unitaire dirigé vers le haut :

$$-6\, \pi\, \mu\, r\, v_2\, \vec{k} - 6\, \pi\, \mu\, r\, v_1\, \vec{k} + q\, E\, \vec{k}$$

d'où on tire :

$$\boxed{q = -\frac{6\, \pi\, \mu\, r\, (v_1 + v_2)}{E} = -\frac{6\, \pi\, \mu\, r\, d\, (v_1 + v_2)}{U}}$$

7) Les charges sont toutes multiples de celle de la gouttelette 4, donc :

$$e = 1,6 \times 10^{-19}\, C$$