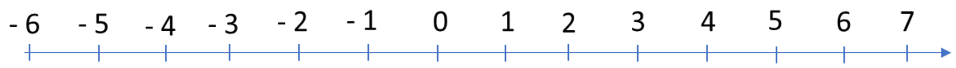
Opérations de base sur les nombres relatifs

Les opérations de base faites sur les nombres les plus naturels, entiers et décimaux positifs (ceux servant à faire des mesures géométriques pratiques comme des longueurs) et les nombres fractionnaires ou irrationnels (servant aux mesures des objets géométriques idéalisés) vont être étendues à des nombres relatifs qui eux servent à se repérer sur un axe.



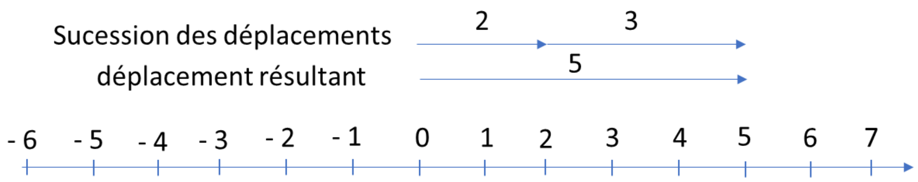
Pour définir les opérations de base , les nombres sont vus comme des translations appelées **vecteurs**. Tout nombre positif est un déplacement qui se fait faire la droite, tout nombre négatif un déplacement qui se fait vers la gauche.

1) L'addition

L'addition de deux nombres relatifs vus comme des déplacements sur un axe est le nombre correspondant à la succession de ces déplacements. Ainsi, par cette méthode, on obtient :

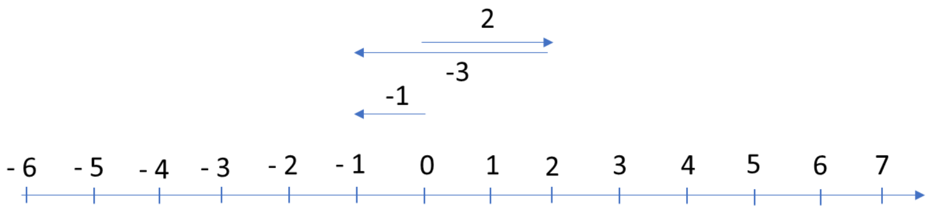
$$2 + 3 = 5$$

Illustré sur le schéma suivant :



Cette définition redonne donc l'addition définie avec des nombres positifs. Mais elle permet d'étendre cette définition à d'autres sommes comme :

$$2 + (-3) = (-1)$$



A noter que l'on a :

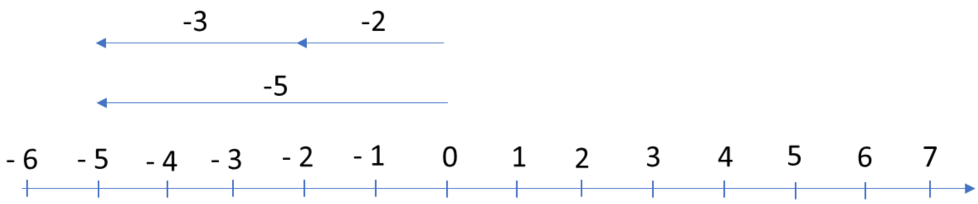
$$2 + (-3) = (-3) + 2$$

Ce qui, de façon simple, revient à dire qu'avancer de deux pas puis reculer de trois produit le même déplacement que reculer de trois pas puis avancer de deux.

A noter que les nombres négatifs sont mis entre parenthèses dans un premier temps afin de ne pas confondre le signe moins d'un nombre et le signe moins de l'opération de soustraction mais cette parenthèse sera omise par la suite comme nous le verrons.

Autre exemple :

$$(-2) + (-3) = (-5)$$



L'addition des nombres relatifs est commutative, associative, elle possède 0 pour élément neutre mais il existe une propriété de plus. Tout nombre possède un nombre qui ajouté à lui donne zéro, on l'appelle l'opposé.

Exemple :

$$8{,}57 + (-8{,}57) = 0$$

8,57 et $-8{,}57$ sont deux nombres opposés, ce que l'on comprend aisément quand on les positionne sur un axe gradué car ils sont symétriques par rapport à l'origine.

2) La multiplication

Rappelons la définition naturelle pour des nombres positifs sur un exemple :

$$3 \times 5 = 5 + 5 + 5$$

Il est alors naturel d'étendre cette définition sous la forme :

$$3 \times (-5) = (-5) + (-5) + (-5) = -15$$

Et, afin de conserver la propriété de commutativité :

$$(-5) \times 3 = -15$$

Voyons alors comment définir naturellement $(-5) \times (-3)$ en notant que :

$$(-5) \times \big((-3) + 3\big) = (-5) \times 0 = 0 \times (-5) = 0$$

Or, si on veut conserver la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, on doit avoir :

$$(-5) \times (-3) + \ (-5) \times 3 = (-5) \times \big((-3) + 3\big) = 0$$

Donc $(-5) \times (-3)$ doit être défini comme étant l'opposé de $(-5) \times 3$. Ainsi :

$$(-5) \times (-3) = 15$$

On constate donc que la définition donnée consiste à multiplier les nombres sans leurs signes et ajouter le signe moins quand les deux nombres à multiplier sont de signes contraires.

Pour définir le signe d'un produit de deux nombres relatifs , on peut retenir la règle des signes suivantes :

$$+ \times + = +$$

$$+ \times - = -$$

$$- \times + = -$$

$$- \times - = +$$

La multiplication ainsi définie est commutative, associative et a pour élément neutre 1, mais elle possède une propriété supplémentaire. Tout nombre non nul possède un nombre qui multiplié à lui donne 1, on l'appelle son inverse.

La multiplication des nombres relatifs est également distributive par rapport à l'addition

Exemple :

$$2 \times \frac{1}{2} = 1$$

2 et $\frac{1}{2}$ sont inverses, tout comme $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{3}$ ou bien $\sqrt{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$

<u>3) La soustraction</u>

La soustraction se définit à partir de l'addition. Rappelons ce fait pour les nombres positifs :

$6 - 2 = 4$ parce que $2 + 4 = 6$.

On définira donc naturellement :

$$6 - (-2) = 6 + 2 = 8$$

Car :

$$(-2) + (6 + 2) = 6 + \big((-2) + 2\big) = 6 + 0 = 6$$

De même :

$$(-6) - (-2) = (-6) + 2 = (-4)$$

et :

$$(-6) - 2 = (-6) + (-2) = (-8)$$

La règle est donc :

Soustraire deux nombres relatifs revient à ajouter au premier l'opposé du second.

La règle énoncée permet de simplifier l'écriture d'une succession d'opérations d'addition et de soustraction afin d'éviter l'apparition de doubles signes. Ainsi :

$$A = (-8) + 7 - (-4) + (-9) - 1$$

sera écrite plus simplement sous forme :

$$A = -8 + 7 + 4 - 9 - 1$$

Sous cette forme, on pourra permuter des termes, tout en prenant garde que seule l'addition est commutative et associative. Il faudra bien prendre le terme ainsi que le signe se trouvant à sa gauche. Ainsi le -8 pourra être déplacé de premier terme à dernier terme :

$$A = 7 + 4 - 9 - 1 - 8$$

Les deux premiers terme 7 et 4 pourront être associés dans une addition qui donne 11, et les trois derniers $-9, -1, -8$ gagneront à l'être également dans une addition de trois nombres négatifs qui donne -18 , ce qui aboutit à :

$$A = 11 - 18 = -7$$

<u>4) La division</u>

La division se définit à partir de la multiplication. Rappelons ce fait pour les nombres positifs :

$6: 2 = 3$ parce que $2 \times 3 = 6$.

On définira donc naturellement :

$$6 \div (-2) = (-3)$$

Car :

$$(-2) \times (-3) = 6$$

De même :

$$(-6): (-2) = 3$$

et :

$$(-6): 2 = (-3)$$

La règle est donc :

Diviser deux nombres relatifs revient à diviser les nombres sans leurs signes et ajouter le signe moins si les nombres sont de signes contraires.

Le signe du résultat de la division de deux nombres relatifs est donné par la règle des signes, analogue à celle de la multiplication :

$$+ : + = +$$

$$+ : - = -$$

$$- : + = -$$

$$- : - = +$$

La division est également distributive par rapport à l'addition et par rapport à la soustraction.

Exemples :

$$\big((-33)+55\big):11=(-33):11+55:11=(-3)+5=2$$

$$\big((-33)-55\big):11=(-33):11-55:11=(-3)-5=(-3)+(-5)=(-8)$$