Opérations de base sur les fractions réelles

1) Définition d'une fraction réelle :

Rappelons d'abord qu'on appelle **nombre rationnel,** le résultat de la division d'un nombre entier relatif par un nombre entier naturel non nul.

On appelle de façon plus générale, **fraction réelle**, le résultat de la division d'un nombre réel par un autre non nul.

Exemple :

$$\frac{-\pi}{2{,}5}$$

Le nombre que l'on divise est alors appelé **numérateur** et celui par lequel on divise, **dénominateur**.

Dans l'exemple précédent $-\pi$ est le numérateur et 2,5 le dénominateur.

2) Propriété de la division de deux nombres réels

Notons qu'un nombre rationnel peut être représenté d'une infinité de façon, en multipliant numérateur et dénominateur par 2,3,4,etc.., comme l'illustre l'exemple :

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\cdots$$

En effet , on ne change pas le résultat d'une division en multipliant les deux nombres à diviser par un même nombre. Ainsi

$$3:4=0{,}75$$

$$6:8=0{,}75$$

$$9:12=0{,}75$$

Etc

Notons alors qu'il en va de même pour deux nombres quelconques a et $b\neq 0$ (les nombres dits réels) :

Si :

$$a:b=q$$

Alors, par définition même de la division :

$$a=b\times q$$

Alors pour tout nombre réel $c\neq 0$:

$$a\times c=(b\times q)\times c$$

Donc, par commutativité et associativité de la multiplication :

$$a\times c=(b\times c)\times q$$

Donc :

$$(a \times c) : (b \times c) = q$$

D'où la règle :

Pour tous nombres réels $\boldsymbol{a, b \neq 0, c \neq 0}$

$$\boldsymbol{a : b = (a \times c) : (b \times c)}$$

ou encore, écrite en format dit de fraction :

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}}$$

Autrement dit :

On ne change pas le résultat d'une division en multipliant le nombre à diviser (numérateur) et le diviseur (dénominateur) par un même nombre.

<u>**2) Addition ou soustraction de deux fractions**</u>

<u>**a) cas de deux fractions ayant même dénominateur :**</u>

Pour tous nombres réels $\boldsymbol{a, b, c \neq 0}$

$$\boldsymbol{a : c + b : c = (a + b) : c}$$

ou encore, écrite en format dit de fraction :

$$\boldsymbol{\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}}$$

Autrement dit :

L'addition de deux fractions de même dénominateur est une fraction de même dénominateur et dont le numérateur est la somme des numérateurs des fractions à additionner.

Il y a une version qui s'en déduit en soustraction :

$$\boldsymbol{\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}}$$

<u>Preuve</u> : Cette propriété est la distributivité à droite de la division par rapport à l'addition ou la soustraction.

b) Cas de deux fractions ayant des dénominateurs différents :

Pour tous nombres réels $\boldsymbol{a, b \neq 0, c, d \neq 0}$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times d}+\frac{c\times b}{d\times b}=\frac{a\times d+c\times b}{b\times d}=\frac{a\,d+c\,b}{b\,d}$$

Autrement dit :

Pour additionner deux fractions de dénominateurs différents, on commence par mettre ces fractions sur un même dénominateur.

Il y a une version qui s'en déduit en soustraction :

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\,d-c\,b}{b\,d}$$

Remarques :

Le dénominateur commun le plus avantageux n'est pas toujours le produit des dénominateur des fractions à additionner comme le montrent ces exemples :

Exemple 1 :

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{15}=\frac{5\times 5}{12\times 5}+\frac{7\times 4}{15\times 4}=\frac{25}{60}+\frac{28}{60}=\frac{53}{60}$$

En effet, le plus petit multiple commun à 12 et 15 n'est pas le produit 12×15 mais 60.

Exemple 2 :

$$\frac{\pi}{0,5}+\frac{\pi}{2,5}=\frac{\pi\times 2}{0,5\times 2}+\frac{\pi\times 2}{2,5\times 2}=\frac{2\,\pi}{1}+\frac{2\,\pi}{5}=\frac{2\,\pi\times 5}{1\times 5}+\frac{2\,\pi}{5}=\frac{10\,\pi}{5}+\frac{2\,\pi}{5}=\frac{12\,\pi}{5}$$

Là encore, il n'est pas avantageux de prendre le produit $0,5\times 2,5$ comme dénominateur commun, mais plutôt de commencer par mettre les deux fractions sur des dénominateurs entiers. Ceci facilite ensuite le calcul approché. En effet, si on prend pour valeur approchée de π la valeur 3,14 alors, le calcul à effectuer est :

$$12\times 3,14:5=24\times 3,14:10=2,4\times 3,14=7,536$$

On voit aussi sur cet exemple tout l'intérêt à simplifier une somme de fraction avant d'en évaluer une valeur approchée car calculer d'abord $3,14:0,5$ puis $3,14:2,5$ et ajouter les résultats eut été plus fastidieux.

3) Produit de deux fractions

Pour tous nombres réels $\boldsymbol{a, b \neq 0, c, d \neq 0}$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}}$$

Autrement dit :

Le produit de deux fractions réelles est une fraction dont le numérateur est le produit des numérateurs et le dénominateur le produit des dénominateurs des fractions à multiplier.

Preuve : Par commutativité et associativité du produit on a :

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times (b \times d) = \left(\frac{a}{b} \times b\right) \times \left(\frac{c}{d} \times d\right) = a \times c$$

Donc :

$$(a \times c) : (b \times d) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$$

Remarque : D'un point de vue pratique, il n'est pas forcément avantageux de calculer le produit des numérateurs et le produit des dénominateurs. Il vaut mieux penser à simplifier en repérant un facteur commun entre les facteurs du numérateur et facteurs du dénominateur.

Exemple :

$$\frac{3}{4} \times \frac{44}{9} = \frac{3 \times 44}{4 \times 9} = \frac{3 \times 4 \times 11}{4 \times 3 \times 3} = \frac{11}{3} = \frac{9}{3} + \frac{2}{3} = 3 + 0{,}666.. = 3{,}666 \dots$$

Là encore on voit tout l'intérêt de simplifier le produit des deux fractions à l'aide des règles avant éventuellement de procéder à un calcul approché.

4) Division d'une fraction par une autre

Pour tous nombres réels $\boldsymbol{a, b \neq 0, c, d \neq 0}$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}}$$

Autrement dit :

Diviser une fraction par une autre revient à la multiplier à l'inverse de cette dernière

Preuve : Par commutativité et associativité du produit on a :

$$\frac{c}{d} \times \left(\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}\right) = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}\right) = \frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$$

Donc :

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

Exemple :

$$\frac{3}{4}:0{,}5=\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\times\frac{2}{1}=\frac{3\times 2}{4\times 1}=\frac{3\times 2}{2\times 2}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

5) Divisions successives

Pour tous nombres réels $\boldsymbol{a, b\neq 0, c\neq 0}$:

$$\boldsymbol{\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b\times c}}$$

Autrement dit :

Diviser un nombre successivement par deux nombres revient à le diviser par leur produit.

Preuve : on a :

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}:\frac{c}{1}=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}=\frac{a\times 1}{b\times c}=\frac{a}{b\times c}$$

Exemple :

$$\frac{\frac{5}{7}}{15}=\frac{5}{7\times 15}=\frac{5\times 1}{7\times 5\times 3}=\frac{1}{7\times 3}=\frac{1}{21}$$