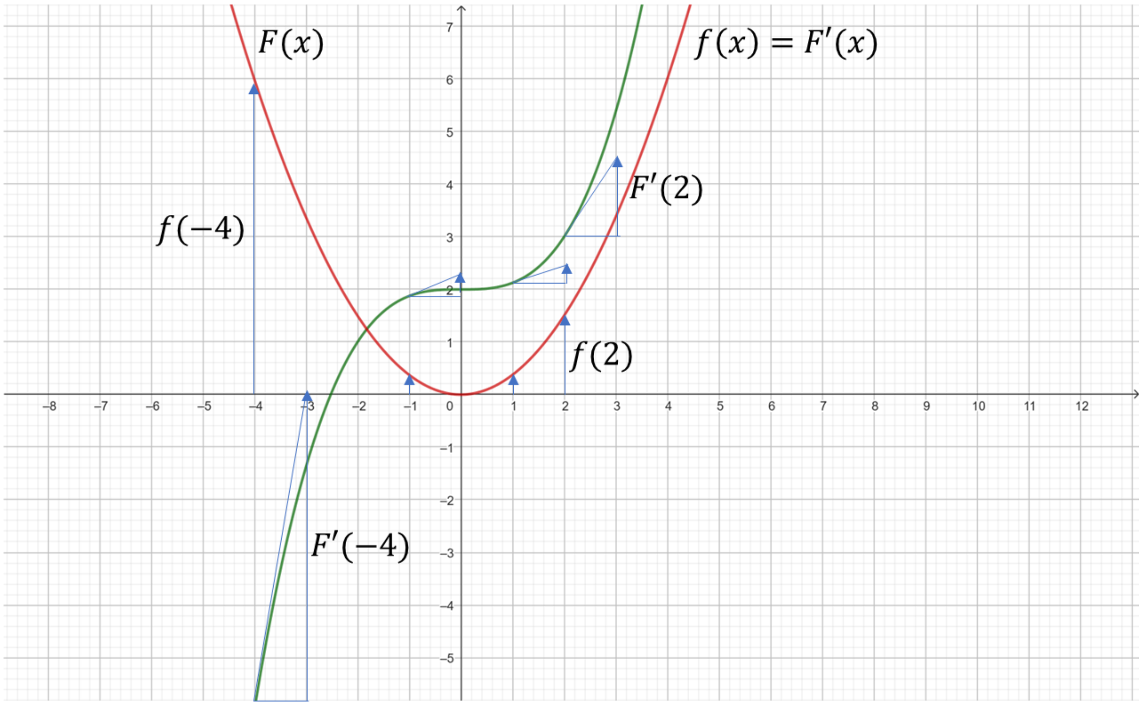
Primitives

1) Définition

Considérons deux fonctions f et F définies sur un même intervalle I. On dit que F est une primitive de f sur l'intervalle I si f est la fonction dérivée de F sur I, autrement dit, si pout tout $x \in I : F'(x) = f(x)$.

Exemple :

$$F(x) = \frac{1}{8}\,x^3 + 2, \quad f(x) = \frac{3}{8}\,x^2$$



Sur le graphique, cela se traduit par le fait que la valeur de $f(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de F à l'abscisse x.

Notons que si F est une primitive de f sur un intervalle I alors en ajoutant à F une constante arbitraire c, on obtient une autre primitive (en fait on les obtient toutes de cette façon).

Dans l'exemple, toutes les primitives de la fonction f de l'exemple sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions définies par :

$$F(x) = \frac{1}{8}\,x^3 + 2 + c = \frac{1}{8}\,x^3 + constante\ arbitraire$$

Remarque importante :

Déterminer les primitives d'une fonction f d'expression connue sur I peut aussi se traduire comme étant résoudre sur I une **équation différentielle** d'inconnue F définie par :

$$F'(x) = f(x)$$

2) Primitives des fonctions de référence

La méthode est simple et reprend les formules de dérivation. Illustrons la sur un exemple :

Nous avions établi sur $\mathbb{R}$:

$$(x^2)' = 2\,x$$

On en déduit :

$$\frac{1}{2}(x^2)' = \ x$$

Puis :

$$\left(\frac{1}{2}\,x^2\right)' = x$$

La fonction $x \to \frac{1}{2}\,x^2$ est donc une primitive de la fonction $x \to x$ sur $\mathbb{R}$ et toutes les primitives de cette dernière sont les fonctions $x \to \frac{1}{2}\,x^2 + c$ où c est une constante arbitraire.

Par cette méthode on aboutit au tableau suivant :

Fonction f	D_f	**Une primitive F**	D_F
$\boldsymbol{constante\ c}$	$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{c\,x}$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{x}$	$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}x^2}$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{x^2}$	$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{\frac{1}{3}x^3}$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{x^n, n \in \mathbb{N}}$	$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{\frac{1}{n+1}x^{n+1}}$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{\frac{1}{x}}$	$]\boldsymbol{0}, +\infty[$	$\boldsymbol{Ln(x)}$	$]\boldsymbol{0}, +\infty[$
$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x}}}$	$]\boldsymbol{0}, +\infty[$	$\boldsymbol{2\,\sqrt{x}}$	$]\boldsymbol{0}, +\infty[$
$\boldsymbol{sin(x)}$	$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{-cos(x)}$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{cos(x)}$	$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{sin(x)}$	$\mathbb{R}$
$\boldsymbol{e^x}$	$\mathbb{R}$	$\boldsymbol{e^x}$	$\mathbb{R}$

Remarque :

On peut ajouter également cette formule qui englobe les trois premières et la cinquième :

$$f(x) = x^a, a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

$$f(x) = \frac{1}{a+1} x^{a+1}$$

Avec une définition pouvant être restreinte à $\mathbb{R}^*$ ou $]0; +\infty[$ ou $[0; +\infty[$ selon les cas.

Exemple :

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad D_f = [0; +\infty[$$

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}\, x^{\frac{1}{2}}\, x^1 = \frac{2}{3}\, x\, \sqrt{x}\,, \qquad D_F = [0; +\infty[$$

3) Calcul de primitives pour des fonctions plus complexes

Dans nombre d'expressions de fonctions utilisant des opérations simples comme l'addition, la soustraction, le produit, le quotient et la composée, on peut obtenir une expression analytique d'une primitive par différentes méthodes dont celle que nous présentons ici, qui sera une des plus utiles, la **reconnaissance de la dérivée d'une fonction composée :**

On rappelle que si sur un intervalle I on a :

$$\boldsymbol{f(x) = G'\big(u(x)\big)\ u'(x)}$$

alors f est la dérivée de la fonction $x \to G(u(x))$. Une primitive de f sur I est ainsi :

$$\boldsymbol{F(x) = G(u(x))}$$

Voyons comment utiliser cela sur un exemple :

$$f(x) = (3\,x + 1)^2$$

Faisons en sorte d'obtenir la forme précédente en introduisant :

$$u(x) = 3\,x + 1$$

Donc :

$$u'(x) = 3$$

Faisons alors apparaitre $u'(x)$ dans l'expression de $f(x)$ en compensant par un facteur $\frac{1}{3}$

$$f(x) = (u(x))^2 = \frac{1}{3}(u(x))^2\, u'(x)$$

Pour trouver F, il suffit de déterminer une primitive en u de la fonction :

$$u \to \frac{1}{3}u^2$$

qui est la fonction :

$$u \to \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} u^3 = \frac{1}{9} u^3$$

On obtient ainsi une primitive de f en la variable x sur $\mathbb{R}$:

$$F(x) = \frac{1}{9}(3\,x + 1)^3$$

Cette méthode conduit au tableau suivant des primitives des composées des fonctions de référence avec une fonction affine $x \to a\,x + b$:

Fonction f	D_f	**Une primitive F**	D_F
$(a\,x+b)^2$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{3\,a}(a\,x+b)^3$	$\mathbb{R}$
$(a\,x+b)^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{(n+1)\,a}(a\,x+b)^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{a\,x+b}$	$\mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{b}{a}\right\}$	$\frac{1}{a}\,Ln(\|a\,x+b\|)$	$\mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{b}{a}\right\}$
$sin(a\,x+b)$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{a}\,cos(a\,x+b)$	$\mathbb{R}$
$cos(a\,x+b)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}\,sin(a\,x+b)$	$\mathbb{R}$
$e^{a\,x+b}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}e^{a\,x+b}$	$\mathbb{R}$

On peut ajouter également cette formule qui englobe les deux premières :

$$f(x) = (a\,x + b)^c, c \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$$

$$f(x) = \frac{1}{(c+1)\,a}(a\,x + b)^{c+1}$$

<u>Exemple</u> :

$$f(x) = \sqrt{2\,x + 1}, \qquad D_f = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

On pose (en omettant la variable x)

$$u = 2\,x + 1$$

On calcule la dérivée en x :

$$u' = 2$$

On transforme cette relation en :

$$\frac{1}{2} u' = 1$$

Et on en déduit :

$$f(x) = \sqrt{u} = \sqrt{u} \times 1 = \frac{1}{2}\sqrt{u}\ \ u' = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\ \ u'$$

On fait alors abstraction du u' et on fait une primitive en la variable u :

$$F(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3}\ u^{\frac{1}{2}}\,u^{1} = \frac{1}{3}\ u\,\sqrt{u} = \frac{1}{3}\ (2\,x+1)\,\sqrt{2\,x+1}$$

laquelle est définie sur $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$