Equations différentielles du premier ordre

I Définition :

Une équation différentielle du premier ordre est une équation dans laquelle figure une fonction F à déterminer ainsi que sa dérivée F'. Voici quelques exemples :

$$F'(x) = 1$$

$$F'(x) = x$$

$$F'(x) = 2\,F(x) + 1$$

Résoudre une équation différentielle c'est trouver toutes les fonctions vérifiant cette équation.

L'usage veut qu'on note y la fonction F inconnue et y' sa dérivée. Les 3 exemples précédant se notent alors ainsi, la variable x étant omise :

$$y' = 1$$

$$y' = x$$

$$y' = 2\,y + 1$$

Voyons les exemples utiles pour le programme de BTS en procédant par difficulté croissante.

II Résolution par difficulté croissante

1er Type : le plus simple : seule figure y' et pas y

$$\boxed{\boldsymbol{y' = f(x)}}$$

où f est une fonction connue dont une primitive est la fonction F. Alors l'équation s'écrit :

$$y' = F'(x)$$

Soit encore :

$$y' - F'(x) = 0$$

Donc la fonction $y - F(x)$ a une dérivée nulle. Elle est donc constante. Les solutions sont donc les fonctions de la forme :

$$\boxed{\boldsymbol{y = F(x) + c}}$$

où c est un réel quelconque.

Exemple : soit à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$\boxed{y' = 2 + x + 5\,x^2}$$

En utilisant le symbole $\int f$ pour désigner une primitive de f, les solutions sont les fonctions de la forme :

$$y = \int (2 + x + 5\,x^2) + c$$

et en utilisant les propriétés des primitives, on se ramène à calculer des primitives de fonctions élémentaires :

$$y = 2\int 1 + \int x + 5\int x^2 + c$$

Ainsi :

$$\boxed{y = 2\,x + \frac{x^2}{2} + 5\,\frac{x^3}{3} + c = 2\,x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{5}{3}\,x^3}$$

2ème Type : y' est proportionnelle à y

$$\boxed{\boldsymbol{y' = a\,y}}$$

où a est un réel quelconque.

On note tout d'abord que les fonctions de la forme $y = c\,e^{a\,x}$ où c est une constante quelconque sont solutions. En effet :

$$(c\,e^{a\,x})' = c\,(e^{a\,x})' = c \times a\,e^{a\,x} = a \times c\,e^{a\,x}$$

Montrons alors qu'il n'y en pas d'autres. En effet, si y est une fonction vérifiant $y' = a\,y$ alors on peut noter que :

$$(y\,e^{-a\,x})' = y'e^{-a\,x} + y\,(-a\,e^{a\,x}) = a\,y\,e^{-a\,x} - a\,y\,e^{-a\,x} = 0$$

Donc la fonction $y\,e^{-a\,x}$ est une fonction constante de valeur c. Ainsi :

$$y\,e^{-a\,x} = c$$

donc

$$y = \frac{c}{e^{-a\,x}} = c\,e^{a\,x}$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme :

$$\boxed{\boldsymbol{y = c\,e^{a\,x}} \textbf{ pour } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}}$$

Exemples :

Equation différentielle	Solutions sur $\mathbb{R}$
$y' = y$	$y = c\,e^{x}$
$y' = 2\,y$	$y = c\,e^{2\,x}$
$y' = -0{,}1\,y$	$y = c\,e^{-0{,}1\,x}$
$y' = \frac{y}{3}$	$y = c\,e^{\frac{x}{3}}$
$y' = \sqrt{2}\,y$	$y = c\,e^{\sqrt{2}\,x}$
$y' = \pi\,y$	$y = c\,e^{\pi\,x}$

3ème Type : y' est égale à une fonction proportionnelle à y ajoutée à une constante

$$\boxed{\boldsymbol{y' = a\,y + b}}$$

où a et b sont deux réels quelconques, a non nul.

On note tout d'abord qu'on peut trouver une solution particulière constante y_p à cette équation notée (E). En effet celle-ci doit vérifier :

$$y_p{}' = a\,y_p + b$$

donc :

$$0 = a\,y_p + b$$

soit :

$$y_p = -\frac{b}{a}$$

Dans ce cas :

$$b = y_p{}' - a\,y_p$$

Et l'équation (E) peut se réécrire :

$$y' = a\,y + y_p{}' - a\,y_p$$

donc :

$$y' - y_p{}' = a\,(y - y_p)$$

soit encore :

$$(y - y_p)' = a\,(y - y_p)$$

La fonction $y - y_p$ est donc solution d'une équation notée (H) appelée équation homogène associée ou encore équation sans second membre, à savoir l'équation :

$$y' = a\,y$$

Ainsi :

$$y - y_p = c\,e^{a\,x}$$

Les solutions sont donc les fonctions de la forme :

$$\boxed{\boldsymbol{y = y_p + c\,e^{a\,x}} \textbf{ pour } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}}$$

C'est-à-dire qu'elles sont formées de la **somme d'une solution particulière constante et de la solution générale de l'équation homogène associée**.

<u>Exemple</u> : Soit à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y' = -0{,}1\, y + 1$ appelée (E)

<u>1ère étape</u> : On recherche une solution particulière constante y_p donc de dérivée $y_p{}' = 0$ en résolvant :

$$y_p{}' = -0{,}1\, y_p + 1$$

Soit :

$$0 = -0{,}1\, y_p + 1$$

Donc :

$$y_p = \frac{1}{0{,}1} = 10$$

<u>2ème étape</u> : On résout l'équation homogène associée :

$$y' = -0{,}1\, y$$

On trouve :

$$y = c\, e^{-0{,}1\, x}$$

<u>3ème étape</u> : On additionne les deux pour obtenir la solution de l'équation (E) :

$$y = 10 + c\, e^{-0{,}1\, x}$$

<u>Remarque 1</u> : Il est très courant de présenter de façon légèrement différente ces équations en les mettant sous la forme :

$$y' + a\, y = b$$

Dans ce cas $y' + a\, y$ est la partie de l'équation contenant la fonction inconnue y ainsi que sa dérivée y'. On l'appelle **premier membre**. b est appelé **second membre**, il est ici constant.

On se ramène à la présentation que nous avons adoptée en écrivant l'équation sous forme :

$$y' = -a\, y + b$$

<u>Remarque 2</u> Les solutions forment une famille de fonctions paramétrées par une constante arbitraire c. Si on veut déterminer une solution unique, il faut imposer une condition comme par exemple l'image de 0. Dans l'exemple précédent, si on impose la condition $y(0) = 2$ alors on peut déterminer c en résolvant une équation :

$$y(0) = 10 + c\, e^{-0{,}1 \times 0} = 2$$

ce qui donne :

$$10 + c = 2$$

soit

$$c = -8$$

La solution est alors la fonction :

$$y = 10 - 8\, e^{-0,1\, x}$$

Cette fonction tend vers 10 en $+\infty$ et est strictement croissante. Voilà l'allure de sa courbe (en vert)