Détermination du prix de vente optimal d'une paire de lunettes

(inspiré du sujet 2021)

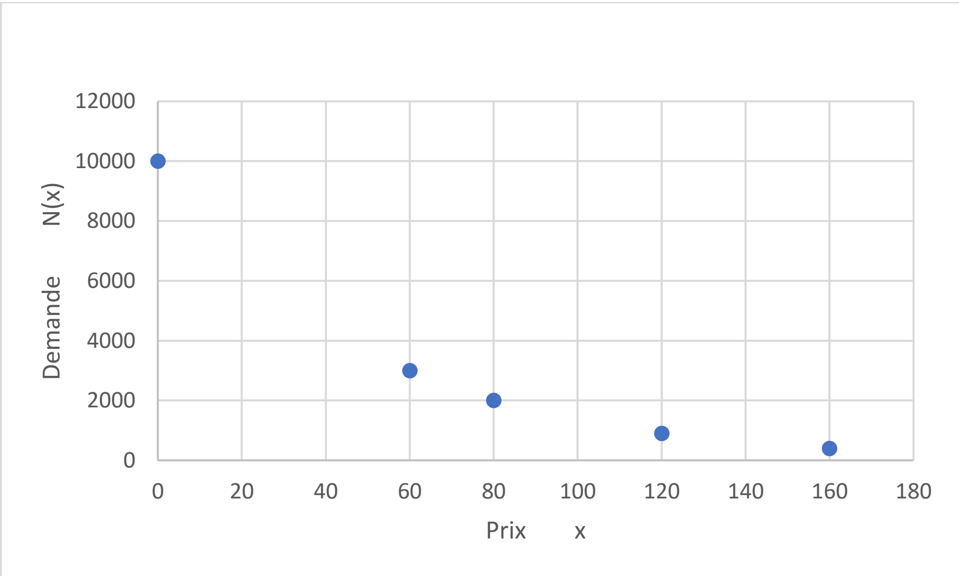
En vue de la commercialisation d'un nouveau modèle de lunettes solaires, une grande chaîne de magasins d'optique a réalisé une enquête auprès de 10 000 clients.
Les conclusions de cette enquête, résumées dans le tableau suivant, donnent le nombre $N(x)$ de clients prêts à acheter ce modèle de lunettes s'il était vendu à x euros l'unité, pour différentes valeurs de x.

Prix x à l'unité (en euros)	60	80	120	160
Nombre $N(x)$ d'acheteurs potentiels	3 000	2 000	900	400

La direction de cette chaîne de magasins estime par ailleurs que le coût de revient pour la production d'une paire de lunettes de ce modèle s'élève à 55 euros.

I) **Modélisation de la demande :**

On commence par représenter le tableau précédent sous forme d'un nuage de points, sachant qu'on peut rajouter un point, car au prix de 0 euros la demande peut être supposée égale à 10 000.



Ces points semblent être proches de ceux de la courbe d'une fonction dont l'expression est de la forme :

$$N(x) = A\, e^{-k\,x}$$

où A et k sont des constantes positives.

Afin de le vérifier, on transforme la fonction en en prenant le logarithme népérien :

$$Ln\big(N(x)\big) = Ln\big(A\, e^{-k\,x}\big)$$

$$Ln\big(N(x)\big) = Ln(A) + Ln\big(\,e^{-k\,x}\big)$$

$$Ln\big(N(x)\big) = Ln(A) - k\,x$$

Donc :

$$Ln\big(N(x)\big) = a\ \ x + b$$

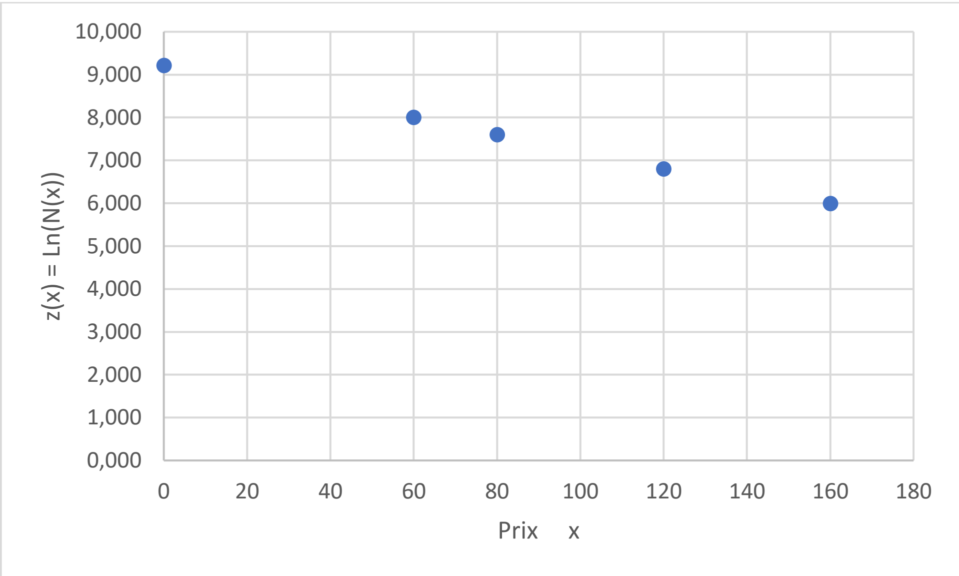
avec : $a = -k,\ \ b = Ln(A)$

On pose alors :

$$z(x) = Ln\big(N(x)\big)$$

Et on refait un tableau de valeurs puis un graphique en nuage de points :

x	0	60	80	120	160
Ln (N(x))	9,210	8,006	7,601	6,802	5,991



Au premier coup d'œil, on observe un très bon alignement des points (ce qui est plutôt rare avec de vraies données statistiques !!!). Ceci est confirmé en calculant le coefficient de corrélation linéaire à l'aide d'une calculatrice :

$$r = 0{,}9999$$

En utilisant le menu STAT d'une calculatrice TI , en créant une liste de 5 éléments pour x et une liste de 5 éléments pour z(x), puis en utilisant le menu CALC et la fonction REGLIN (régression linéaire) , on obtient les valeurs a et b de la droite d'ajustement :

$$a = -0{,}02, \qquad b = 9{,}21$$

La fonction affine d'ajustement est donc :

$$z(x) = -0{,}02\ x + 9{,}21$$

Ainsi :

$$\boxed{Ln\big(N(x)\big) = -0{,}02\ x + 9{,}21}$$

Soit :

$$e^{Ln(N(x))} = e^{-0,02\,x+9,21}$$

$$N(x) = e^{-0,02\,x}\,e^{9,21}$$

Or :

$$e^{9,21} \approx 10\,000$$

Nous obtenons ainsi un modèle continu de la courbe de demande :

$$\boxed{N(x) = 10\,000\,e^{-0,02\,x}}$$

II) Modélisation du bénéfice en fonction du prix

Rappelons la définition du bénéfice avant impôt :

Bénéfice = Chiffre d'affaires hors taxes – Charges variables – Charges fixes

Bénéfice = Prix unitaire x quantité vendue – coût unitaire x quantité vendue – charges fixes

le coût par lunette étant de 55 euros

Maximiser le bénéfice revient donc à déterminer le maximum de la fonction bénéfice hors charges fixes qui est :

$$B(x) = x\,N(x) - 55\,N(x) = (x-55)\,N(x)$$

Soit :

$$\boxed{B(x) = 10\,000\,(x-55)\,e^{-0,02\,x}}$$

III) Etude de la fonction bénéfice :

On étudie la fonction $B(x)$ pour un prix compris entre 0 et 300 euros en calculant sa dérivée :

$$B'(x) = 10\,000\,[(x-55)\,e^{-0,02\,x}]'$$

$$= 10\,000\,[(x-55)'e^{-0,02\,x} + (x-55)\,(e^{-0,02\,x})']$$

$$= 10\,000\,[1\,e^{-0,02\,x} + (x-55)\,(-0,02)e^{-0,02\,x}]$$

$$= 10\,000\,[1\, + (x-55)\,(-0,02)]\,e^{-0,02\,x}$$

$$= 10\,000\,(1 - 0,02\,x + 1,1)\,e^{-0,02\,x}$$

$$= 10\,000\,(2,1 - 0,02\,x)\,e^{-0,02\,x}$$

$$= 10\,000 \times 0,02\,\left(\frac{2,1}{0,02} - \,x\right)\,e^{-0,02\,x}$$

$$= 200\,(105 - \,x)\,e^{-0,02\,x}$$

Finalement :

$$B'x) = -200\,(x - \ 105)\ e^{-0{,}02\,x}$$

On voit donc que $B(x) > 0$ pour $x < 105$ et $B(x) < 0$ pour $x > 105$

On en déduit le tableau de variations de B :

x	0	105	300
Signe de $B'(x)$	+	0	-
Variations de B	↗		↘

B présente donc un maximum en 105 et ce maximum vaut :

$$B(105) = 10\,000\,(105 - 55)\ e^{-0{,}02\,\times 105} = 10\,000 \times 50\ e^{-2{,}1} \approx 61\,228$$

IV) Conclusion de l'étude

Le prix rendant le bénéfice maximal est donc de 105 euros et le bénéfice maximal est de 61 228 euros auquel il faudrait cependant enlever les charges fixes.